دونووان جونسون

منحنیها در فضا

ترجمهٔ پرویز شهریاری

دونووان جونسون

منحنیها در فضا

ترجمهٔ پرویز شهریاری

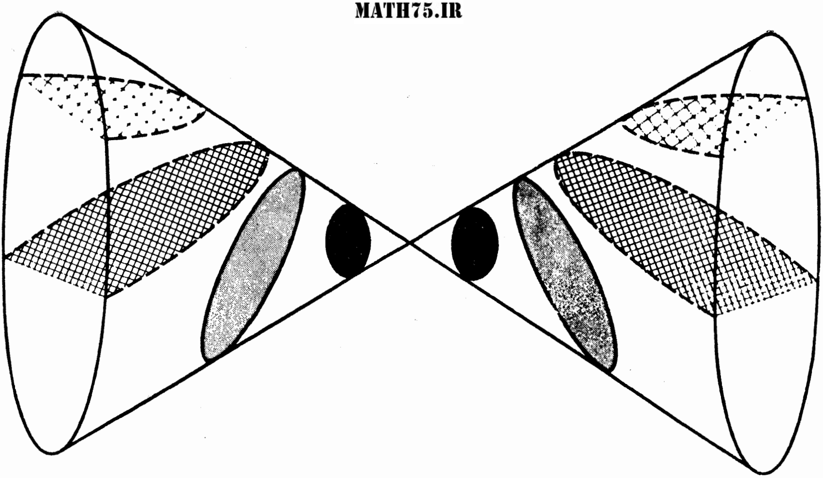
□ منحنیها در فضا
□ دونووان جونسون
□ ترجمهٔ پرویز شهریاری
□ انتشارات چاپار: شاهرضا، خیابان ابوریحان، چهارراه مشتاق
□ چاپ اول آذر ۲۵۳۶
□ چاپ رامین

نخستین کتاب ازاین ردیف، یعنی «دستگاههای محدود در ریاضیات»، دو سال پیش به وسیلهٔ انتشارات چاپار منتشر شد. گرانی بیش ازاندازهٔ کاغذ و چاپ کتاب ـ و به‌خصوص کتابهای ریاضی ـ مانع از آن شد که کتابهای بعدی چاپ شود. چاپ کتاب ریاضی، بـه قدری گران تمام می‌شود که ناشر و خریدار را به سختی می‌رنجاند و ازآنجا کـه چنین کتابهایی نمی‌تواند با تیراژی وسیع چاپ شود، باید ترجمه وتألیفهایی از اینگونه را به‌دست گرفت و در به‌در به دنبال ناشر رفت.

با همهٔ اینها، از «دستگاههای محدود در ریاضیات» به‌طور نسبی استقبال شد و ناشر را برآن داشت تا علی‌رغم همهٔ دشواریها، چاپ کتاب دوم را تقبل کند وبه این‌ترتیب، «منحنیها در فضا» هم از خم وپیچ مشکلات عبور کرد و در دسترس خواننده قرارگرفت.

در اینجا هم، همچون کتاب قبلی باید یادآوری کرد که «برای استفاده ازکتاب، هیچگونه تخصصی لازم نیست و تنها آشنایی به‌مقدمات سادهٔ ریاضی اکتفا می‌کند. تنهاچیزی که برای خواننده لازم است، وجود حوصله،دقت وپیگیری است. و حقیقت اینست که برای فراگیری ریاضیات، به چیز دیگری جز همین‌ها، نیازنداریم».

مترجم



نظام طبیعت، پر ازشگفتیها و قرینه‌سازیهاست؛ و یك هماهنگی و همبستگی عجیب بین مرگ و زندگی مدارها به چشم می‌خورد

کوپرنیك

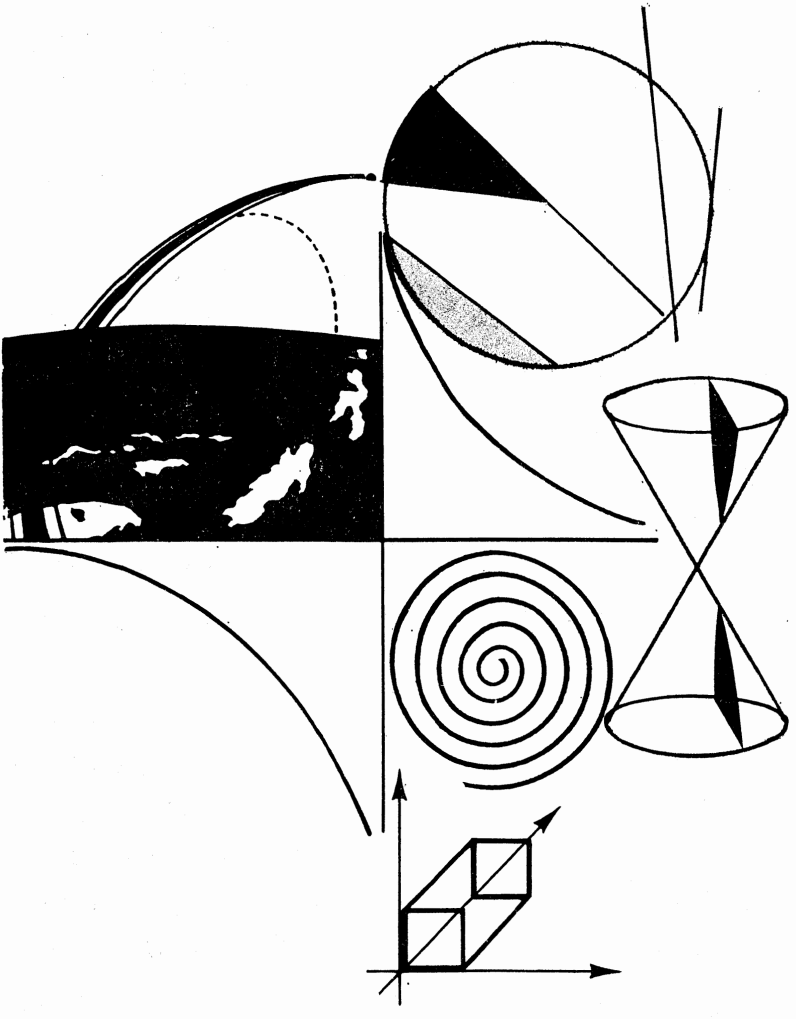
پیش از آنکه آغاز به‌خواندن کنید

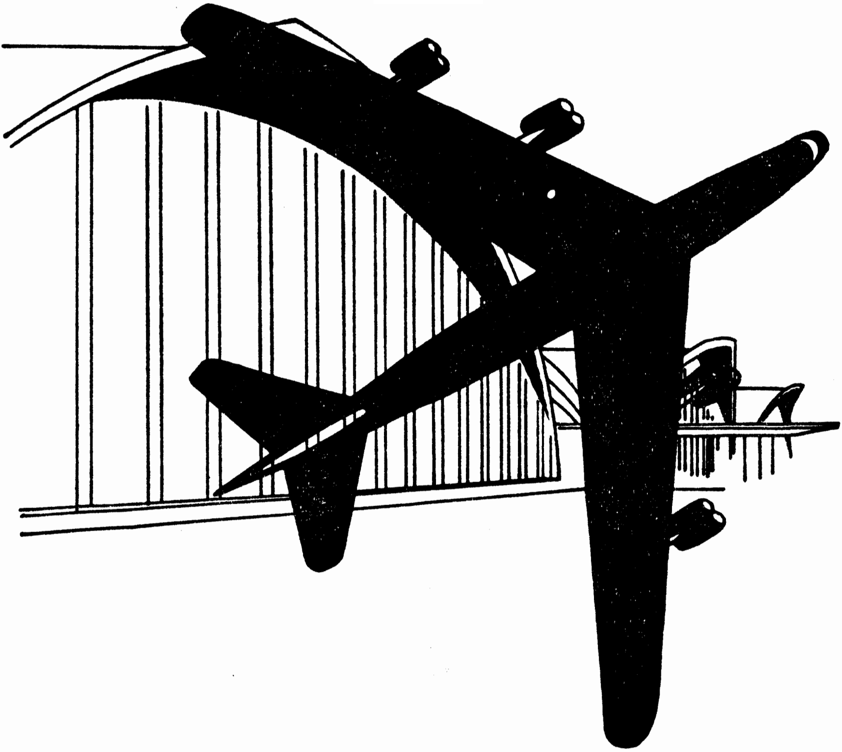
این کتاب کوچك دربارهٔ منحنیها نوشته شده است و هدفش اینست تا شما را درشادی ولذت آنهایی که نکته‌های پرهیجانی را در ریاضیات کشف کرده‌اند، شریك کند. مطالعهٔ ریاضیات هم می‌تواند مثل خواندن یك داستان اسرار آمیز و یا کشف یك غار ناشناخته، جالب باشد. در ریاضیات، نکته‌های غیرمنتظره، معماها، حیله‌ها و اندیشه‌های جالب زیادی وجود دارد، وآرزو می‌کنیم که شما هم، وقتی که این کتاب را می‌خوانید، جستجوی شما در کشف این اندیشه‌ها، برایتان لذت بخش باشد.

البته، برای مطالعهٔ این کتاب باید روشی در پیش گیرید که تا اندازه‌ای با مطالعهٔ یك کتاب داستانی فرق داشته باشد. خود را عادت

دهید که ضمن خواندن کتاب، هرجا که لازم است از قلم و کاغذ استفاده کنید و تا وقتی مطلبی برای شما کاملا روشن نشده‌است، از آن ردنشوید. اگر بار اولی که یك مطلب یا یك جمله رامی‌خوانید، چیزی از آن نفهمیدید، تعجب نکنید و نگران نشوید. حوصله به خرج دهید. اگر روی تمرینی کار می‌کنید، شکل مربوط بـه آنرا رسم کنید وسعی کنید مساله را در نیمهٔ راه رها نکنید. دراینصورت، برای ادامهٔ کار، احساس راحتی بیشتری خواهید کرد. به هرحال، امیدواریم که این کتاب به‌اندازهٔ کافی برای شما لذت‌بخش باشد.

در این کتاب





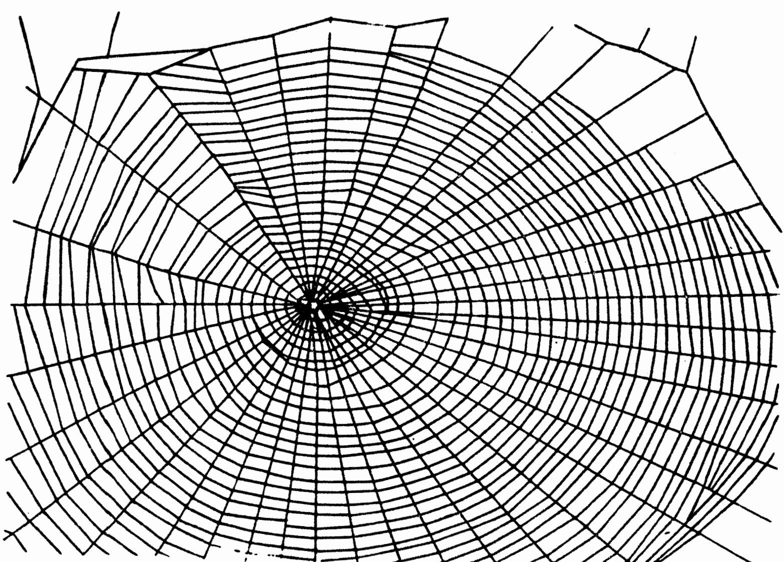
۱. منحنیها

دنیای منحنیها، شکلها و قالبها

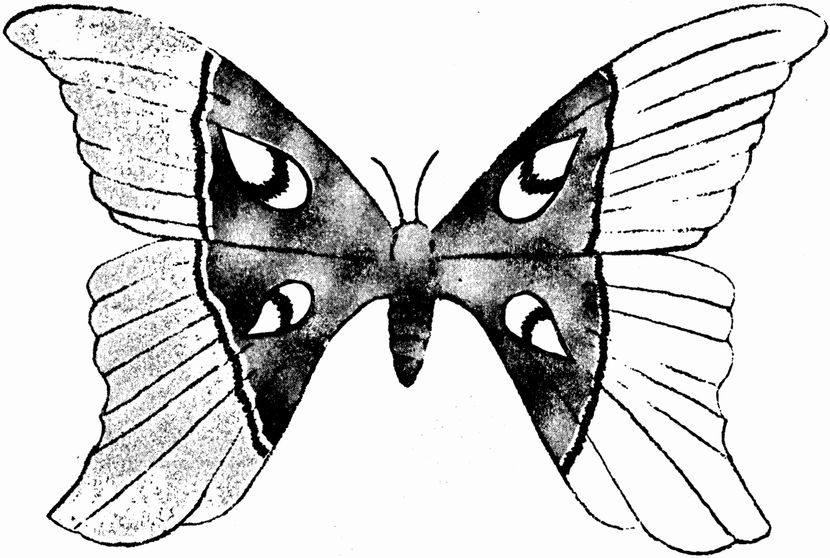
جهانی که در آن زندگی می کنیم، جهان منحنیها، سطحها، شکلها وطرحهای هندسی است. از مسیرحرکت یك سیاره گرفته تا موجهای روی اقیانوسها، همه‌جا می‌توان به منحنیهایی برخورد که در جهان ما، رسم شده‌اند و از نظر ریاضی، قابل بررسی و تجزیه و تحلیل‌اند. از شکل یك کهکشان تا گوی مخروطی درخت کاج، همه‌جا یك نوع هم آهنگی، چه از نظر شکل وچه از نظر طرح، به‌چشم می‌خورد. از تقارنی که درساختمان بدن یك پروانه وجود دارد، تاشکل هندسی زیبایی که یك گلولهٔ برفی به‌خود

می‌گیرد، همه‌جا قالبها و طرحهایی از طبیعت را می‌بینیم که از نظر ریاضی قابل مطالعه است.

دنیای صنعت هم، به منحنیها و شکلها و قالبها، بستگی دارد. از مسیر یك سفینهٔ فضایی تا موجهای رادیو و تلویزیون، همه، منحنیهایی هستند که طرح ریاضی دارند. از شکل یك هواپیمای جت تا طرح یك بیلچه، همه‌جا از سطحهایی استفاده می‌شود که با اصول ریاضی طرح شده است. از تقارنی که در یك وسیلهٔ موسیقی وجود دارد، تا سیم کشی یك اتوبوس، از اصولی که مربوط به شکلها و منحنیهای هندسی است، استفاده شده است.



شکل ۱. منحنیهایی که از خطهای مستقیم یك تار عنکبوت، به‌وجود آمده است.



شکل ۲. تقارن، در ساختمان بدنی یك پروانه

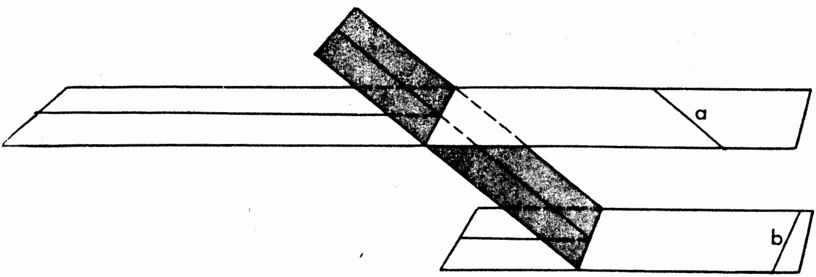
فضایی که در آن زندگی می‌کنیم

ما درفضازندگی می‌کنیم. این‌فضا، ازهمه طرف ما را دربرگرفته است. آیا این فضا جایی به‌آخر می‌رسد؟ ما می‌گوییم که فضا، از تمام جهتها، به‌طور نامتناهی ادامه دارد. البته، گاهی دربارهٔ فضای محدود هم گفتگو می‌کنیم، مثل فضای یك‌اطاق یافضای داخل یك‌یخچال. کسی نمی‌داندکه آیا فضای ما، محدود است یانامحدود.

آیا این فضا مستقیم است یا انحنا دارد؟ ریاضیدانها، در جریان سده‌های متوالی، دربارهٔ این‌موضوعها، باهم بحث کرده‌اند. وقتی که ما در روی زمین، تنها در یکجهت، ومثلا در جهت غرب، حرکت کنیم،

دوباره به‌همان نقطه‌ای‌خواهیم‌رسیدکه سفررا ازآنجا شروع کرده‌بودیم. واین، به‌آن علت است که سطح‌زمین انحنا دارد. حالا، اگر چنین‌سفری را درفضا آغاز کنیم ودائماً در یکجهت، ومثلا روبه‌بالا، حرکت کنیم، آیا زمانی دوباره به‌جای اولیهٔ خود خواهیم رسید؟

ریاضیدانهامی‌گویندکه فضا،مجموعه‌ای ازنقطه‌هاست. هرفضایی، مجموعه‌ای از بینهایت نقطه است. فضا هیچ وزنی ندارد. ما نمی‌توانیم فضا راببینیم، بشنویم‌یالمس کنیم. مادربارهٔسه‌بعدفضا، صحبت‌می‌کنیم: طول، عرض وارتفاع.

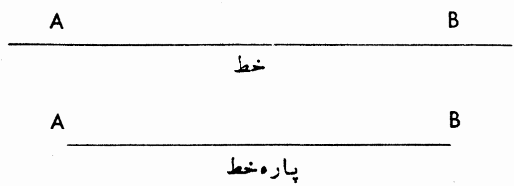


نقطه، خط وسطح در فضا

نقطه. بررسی ما، از منحنیهای فضایـی، از نقطه شروع می‌شود. همانطورکه ۱، مبنای ساختن عددهاست، نقطه هـم عنصر اصلی تشکیل فضاست. نقطه چیست؟ ما وقتی‌که دربارهٔ یك‌نقطه فکر می‌کنیم، اثر یك مداد نوك‌تیز را روی‌کاغذ ویا نوك یك‌سنجاق را، در نظرمی‌گیریم، ولی این تصور درست نیست. نقطه، دارای هیچ‌اندازه‌ای نیست.ما نمی‌توانیم نقطه‌را ببینیم یا لمس کنیم. ریاضیدانها، معمولاً نقطه را، جایی ازفضا

می‌دانند، زیرا نقطه به‌هرحال، جائی ازفضا را مشخص می کند.

خط. گاهی، مجموعه‌ای از نقطه‌ها، خط را بـه وجود می‌آورد. بنابراین، خط عبارتست ازمجموعه‌ای ازنقطه‌ها. خط هیچگونه کلفتی یا پهنایی ندارد، ولی می‌گوییم کـه خط دارای درازاست. خط را می‌توان، ازدوطرف ودرامتداد خودش،تا بینهایت کشید. گاهی‌هم، خط رابه‌عنوان اثر حرکت یك‌نقطهٔ‌متحرك تعریف می کنیم. وقتی‌که تنها به‌قسمتی ازیك خط کار داشته باشیم، آنرا پاره‌خط گوییم. طول یك پاره‌خط را با واحد طول، مثل سانتیمتر، اینچ، میل وغیره اندازه می‌گیریم.



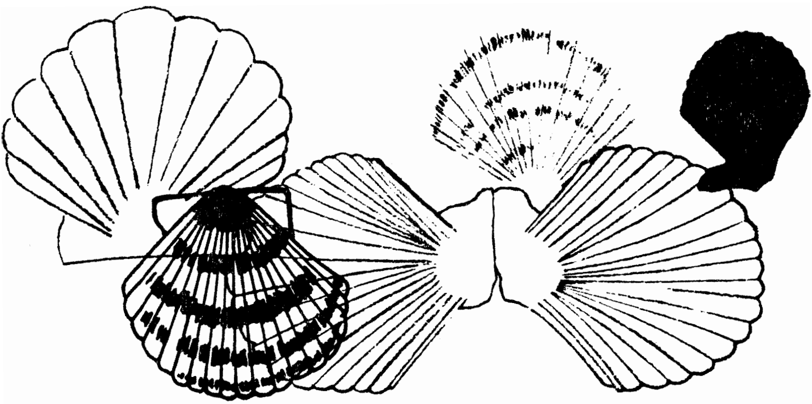
شکل ۳

خط، ممکن است راست باشد، مثل لبهٔ‌خط‌کش یامحل تاخوردگی صفحهٔ‌کاغذی که‌تاشده باشد. خط شکسته، مجموعه‌ای است ازپاره‌خطهای راست‌که جهتهای مختلف دارند وبه‌انتهای یکدیگر وصل شده‌اند. بقیهٔ خطهـا، منحنی هستند. خط منحنی، خطی است کـه دائماً تغییر جهت می‌دهد.

اگرچه طبیعت، خط راست را بـه کار می‌برد، مثل لبهٔ بلورها، شعاع‌نور یاساقهای حشره‌ها؛ با وجود این بیشتر خطهایی که در طبیعت پیدا می‌شود، منحنی است، مثل کنارهٔ‌گوش ماهی یاحلقه‌هایی‌که درطول

سالها در درون تنهٔ درخت به‌وجود می‌آید.

شکل ۴



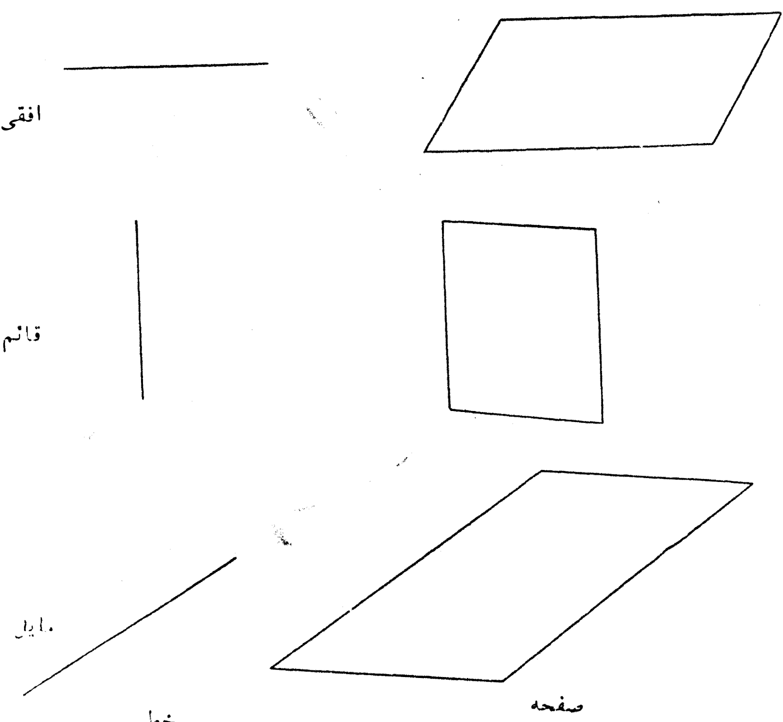
شکل ۵- نمونه‌هایی از گوش ماهی

سطحها و صفحه‌ها

گاهی، مجموعهٔ نقطه‌ها، تشکیل یك صفحه می‌دهند. یك صفحه، یك‌سطح صاف‌است، مثل رویِ‌یك‌میز یا یك‌دیوار. ولی یك‌صفحهٔ‌ریاضی را نمی‌توان دید. صفحهٔ ریاضی، عبارتست از مجموعهٔ نقطه‌ها. صفحه،

هیچ کلفتی ندارد، ولی درازا و پهنا دارد. گاهی می‌گویند که صفحه عبارتست از جای حرکت یك‌خط راست. یك صفحه را از هر طرفی که بخواهیم، می‌توان بزرگ کرد و گسترش داد. هرقطعه ازیك صفحه را می‌توان با واحد مساحت (مثل مترمربع یا جریب) اندازه‌گرفت.

وقتی یك‌خط منحنی حرکت می‌کند، به شرطی‌که دائماً روی یك صفحه نباشد، یك‌سطح منحنی را رسم می‌کند. کره، نمونه‌ای است از یك سطح منحنی. سطحهای منحنی دیگری‌را هم می‌توان ازحرکت یك‌خط



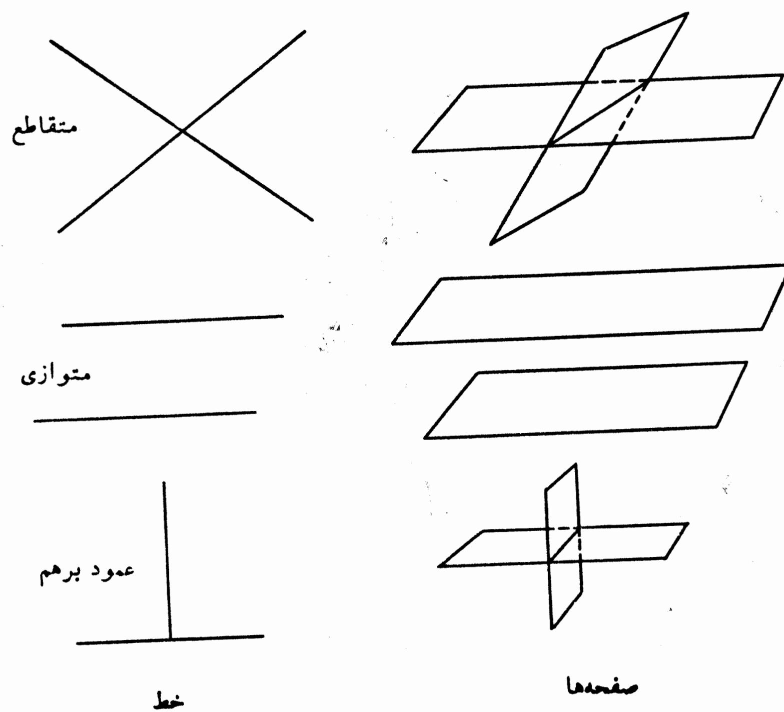
شکل ۶

راست، در امتداد یك مسیر منحنی بدست آورد. مثلاً، استوانـه، سطح دواری است که از حرکت یك خط راست، در حـالیکه به‌یك دایره تکیه کرده است، بدست می‌آید.

یك‌بعد یا دوبعد

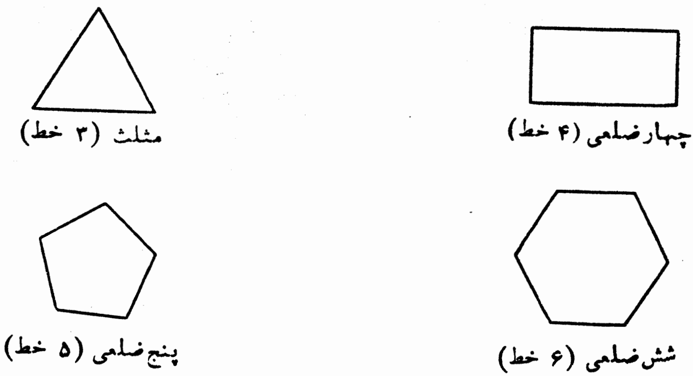
هرخط راست یا صفحه، می‌تواند به‌وضعهای مختلفی درفضا قرار گرفته باشد. این وضعها را در شکل ۶ می‌بینید.

دوخط راست یا دوصفحه هم، نسبت به‌هم درحالتهای گوناگونی هستند، آنطورکه در شکل۷ می‌بینید:



شکل ۷

اگر دوخط راست در دوصفحهٔ مختلف باشند. یعنی نتوانندروی یك صفحه قرارگیرند، آنها را نسبت به‌هم متنافرگویند. اگر چند خط راست، دو به‌دو یکدیگر را دریك صفحه قطع کنند، شکلهای گوناگون هندسی بدست می‌آیدکه ما آنها را چند ضلعی می‌نامیم (شکل ۸):



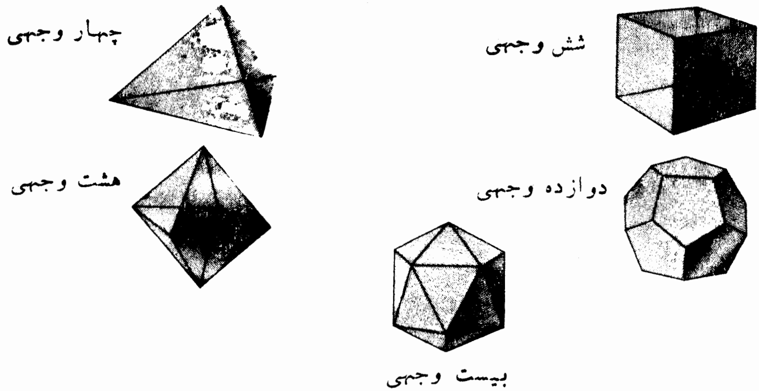
شکل ۸

سه‌بعد یا بیشتر

اگر چند صفحه یکدیگر را قطع کنند، جسمهای هندسی بدست می‌آیدکه ما آنها را چند وجهی می‌نامیم (شکل ۹).

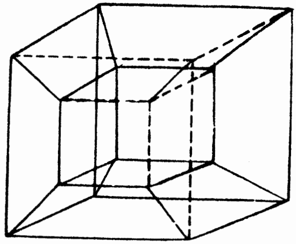
نقطه، هیچ بعدی ندارد. وقتی‌که یك نقطه حرکت‌کند، قطعه‌ای ازیك خط را رسم‌می‌کندکه دارای یك بعد است (درازا). پاره‌خط، ازدو طرف به‌نقطه محدود می‌شود.

وقتی‌که پاره‌خط، درست‌درجهت عمود برامتداد خود وتافاصله‌ای برابر با درازای پاره‌خط، حرکت کند، یك مربع رسم می‌شود که دارای دوبعد است. هر مربع محدود به چهار خط یك‌بعدی است. اگر مربع در جهت‌عمود برصفحهٔ خود وبه‌فاصله‌ای برابر درازای یك‌ضلع خودحرکت



شکل ۹

کند، یك مکعب بـه وجود می‌آورد که سه بعد دارد. این فضای محدود (یعنی مکعب)، به۶ صفحهٔ دوبعدی محدود است. بـه‌همین ترتیب، اگر مکعبی را در جهت «عمود بر فضای خود» حرکت دهیم، یك مکعب‌چهار بعدی بدست می‌آیدکه دارای چهاربعد است. این «فوق فضا»، محدود به هشت فضای سه‌بعدی است (شکل ۱۰).



شکل ۱۰

در هرگامی‌که به جلو برداشته می‌شود (یعنی، با اضافه شدن هر بعد)، تعداد گوشه‌ها دوبرابر می‌شود. بنابراین، تعداد گـوشه‌ها، دریك

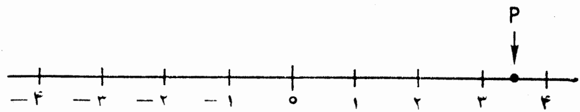
مکعب چهاربعدی برابر $۱۶ = ۲^۴$ ؛ وبه‌طور کلی تعدادگوشه‌ها، درمکعب n بعدی برابر است با ۲^n. اگر تعداد یالها ووجه‌ها (خطها وصفحه‌ها) را در اینگونه شکلها مورد آزمایش قرار دهیم، معلوم می‌شود که تعداد یالها $n \times ۲^{n-۱}$ وتعداد وجه‌ها $(n^۲ - n)۲^{n-۳}$ است.

بنابراین، فضا مجموعه‌ای ازنقطه‌هاست، که هم ازنظر تعداد وهم از نظرگسترش نامتناهی است. همچنین، می‌توان فضا را مجموعه‌ای از خطهای بیشمار ویا سطحهای بیشمار پنداشت. همینطور، فضا رامی‌توان مجموعه‌ای از فضاهای محدود، که ازنظر تعداد بیشمار باشد، به‌حساب آورد. حالا دیگر می‌توانیم، منحنیهارا درفضا، مورد بررسی قراردهیم.

مکان در فضا

برای اینکه درفضا، درامتداد مسیر یك‌منحنی حرکت‌کنیم، باید بتوانیم جای نقطه‌هارا درفضا، معین‌کنیم. دراینصورت خواهیم‌توانست منحنیها را توضیح بدهیم. ما این‌مشکل‌را ازنظر ریاضی، به‌کمك‌ترسیم، حل می‌کنیم. برای اینکه موفق شویم فضا را درچهار بعد خودگسترش دهیم، بهتر است مراجعه‌ای بـه جبر بکنیم. چگونه می‌توان نقطه‌ها را روی یك خط جاداد؟ ساده‌ترین راه اینست‌کـه خط را بـه عنوان محور عددها در نظر بگیریم، مثل شکل ۱۱.

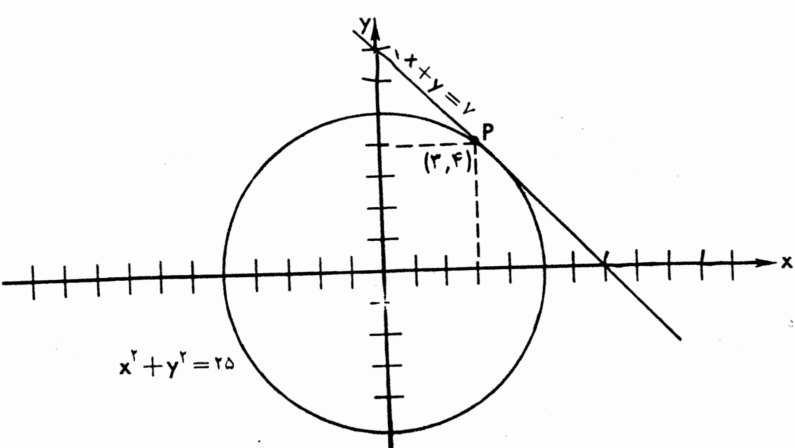
حالا، می‌توانیم مثلاً جای نقطهٔ P راروی این‌خط، مشخص‌کنیم:



شکل ۱۱

نقطهٔ P با عدد $۳\frac{۱}{۲}$ مشخص می‌شود. وقتی‌که عددها، به‌این ترتیب جای نقطه‌ها را مشخص کنند، به‌آنها مختصات گویند: به هر نقطه می‌توان عددی نسبت داد که جای آنرا، مشخص کند. مثلاً، معادله‌ای که جای نقطهٔ P را روی این خط نشان می‌دهد، عبارتست از $x = ۳\frac{۱}{۲}$. صورت کلی معادله، برای مشخص کردن جای یک نقطه بر این خط، عبارتست از $x = a$، که در آن a، یک عدد حقیقی است.

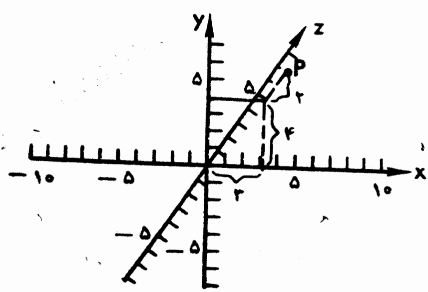
اجازه بدهید که جای یک نقطه را به‌یک صفحه بکشانیم. وقتی‌که بخواهید جای نقطه را بر یک صفحه مشخص کنید، همانطور که در شکل ۱۲ می‌بینید، به دو عدد نیاز دارید.



شکل ۱۲

جای نقطهٔ P، بـه کمك مختصات خود، یعنی زوج مرتب (۳و۴) نشان داده شده است. شمابرای هرنقطه از این صفحه، دوعدد حقیقی‌پیدا خواهید کرد که جای نقطه را مشخص می‌کنند. معادلهٔ یکی از خطهایی که ازنقطهٔ P گذشته است، عبارتست از $x+y=۷$. به‌طورکلی، معادلهٔ هرخط راستی‌که برصفحهٔ xy واقع باشد، بـه صورت $ax+by=c$ در می‌آید. وقتی‌که‌معادله، به‌صورت $x^۲+y^۲=۲۵$ داده شده باشد،نمایش آن برصفحه، یك‌منحنی درمی‌آیدکه دراینجا و بـرای این معادلـه، یك دایره است. نقطهٔ P، یکی ازنقطه‌های این منحنی است (یعنی بر محیط دایره قرار دارد)، زیرا داریم: $۳^۲+۴^۲=۲۵$.

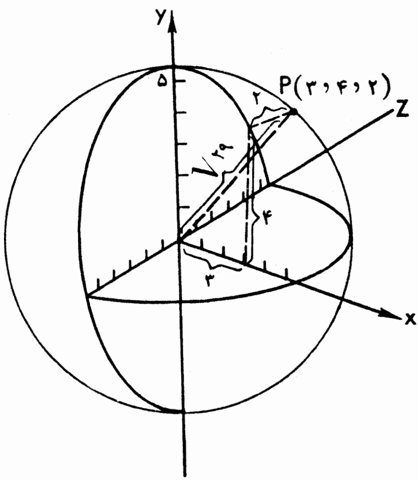
حالا دیگر می‌توانیم تعیین‌جای‌نقطه را،به‌فضای سه‌بعدی‌بکشانیم دراینجا، برای مشخص کردن جای نقطه‌ای‌مانند P، بـه سه‌عدد حقیقی نیازمندیم، یعنی جای نقطهٔ‌ما درفضامثلاً به‌یاری سه‌تایی مرتب (۳و۴و۲) مشخص می‌شود. برای‌هرنقطه‌ازفضا، می‌توانیم‌سه‌عدد حقیقی پیدا کنیم،



شکل ۱۳

که مشخص‌کنندهٔ جای‌آن باشد. صفحه‌ای‌که ازاین نقطه می‌گذرد، مثلا معادله‌ای به‌صورت $x+y+z=۹$ دارد وبنابراین معادلهٔ‌کلی صفحه‌ای ازفضا را می‌توان به‌صورت $ax+by+cz=d$ نـوشت. اگر معادله‌ای

مثل $۲۹ = x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}$ داشته‌باشیم، نمایش آن در فضا، یك سطح کروی می‌شود. این کره، درشکل ۱۴ نشان داده شده است و به سادگی معلوم می‌شود. که نقطهٔ $P(۳،۴،۲)$ روی سطح این کره قرار دارد، زیرا داریم: $۲۹ = ۳^{۲}+۴^{۲}+۲^{۲}$.



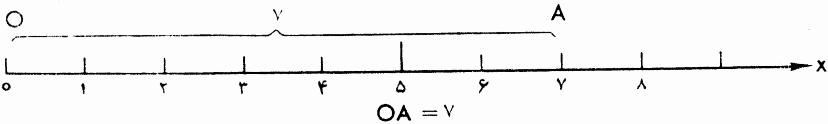
شکل ۱۴

دربارهٔ معادلهٔ $۱۴ = x+y+z+w$ چه می‌توانیم بگوییم؟ از نظر ریاضی، شما دربارهٔ چیزهایی صحبت می‌کنید که درفضای چهاربعدی، دارای یك، دو، سه و چهار بعد هستند. به این ترتیب، $۲۵ = x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}+w^{۲}$، یك فوق‌کره می‌شود. همین مطلب ساده به‌ما نشان می‌دهد که در دنیای ریاضی، چطور می‌توان ازفضای سه‌بعدی، به فضاهایی که‌بیش از سه بعد دارند، رسید.

فاصله‌ها در فضا

همین موضوع که‌می‌توانیم جای یك نقطه‌را در فضا، به کمك مختصات

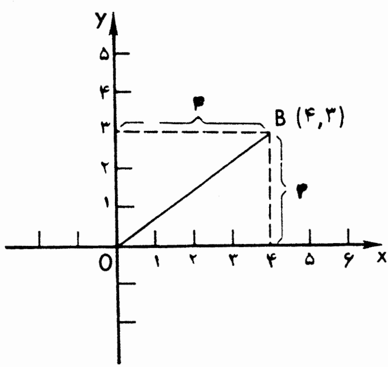
آن مشخص کنیم، می‌تواند راه ساده‌ای را، برای بدست‌آوردن فاصلهٔ‌بین دونقطه درفضا به‌ما نشان دهد. ساده‌ترین مورد، مربوط به‌محاسبهٔ فاصلهٔ یك نقطه تا O ـ مبدأ ـ می‌باشد. وقتی‌که بایك خط‌راست سروکارداشته باشیم، فاصلهٔ یك نقطه‌تامبدأ برابر بامختص آن نقطه است. مثلاً، فاصلهٔ O تا A ـ روی شکل ۱۵ـ برابر است با ۷.



شکل ۱۵

برای محاسبهٔ فاصلهٔ بین دونقطه ازیك‌صفحه، ازقضیهٔ فیثاغورث استفاده می‌کنیم. در شکل ۱۶، فاصلهٔ نقطهٔ B تامبدأ O، عبارتست از طول وتر OB ازمثلث‌قائم‌الزاویهٔ OAB. بنا برقضیهٔ‌فیثاغورث داریم:

$$d=\sqrt{x^۲+y^۲}$$

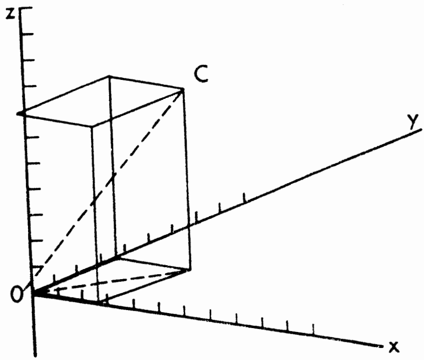


$$OB=\sqrt{۴^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=\sqrt{۲۵}=۵$$

شکل ۱۶

در فضای سه‌بعدی هم، با طریق مشابهی، می‌توان فاصلهٔ تا مبدأ

را بدست آورد. مثلاً، فاصلهٔ نقطهٔ C تامبدأ O، عبارتست از قطر یك منشور قائم (مکعب مستطیل).



$$OC = \sqrt{۴^۲ + ۳^۲ + ۷^۲} = \sqrt{۱۶ + ۹ + ۴۹} = \sqrt{۷۴} \approx ۸/۶$$

شکل ۱۷

دستورمحاسبهٔ فاصلهٔ تامبدأ را، در فضای‌سه‌بعدی، به‌این صورت هم‌می‌توان نوشت: $d = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}$. به‌همین ترتیب، دستورمحاسبهٔ فاصلهٔ یك نقطه تا مبدأ در فضای چهار بعدی، به صورت $d = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲ + w^۲}$ در می‌آید. این روش رامی‌توان برای فاصلهٔ دونقطه در هرگونه فضایی ـ باهر تعداد بعد ـ به‌کاربرد.

چه بساکه نمودارهای چهاربعدی برای مسافرتهای فضایی، بسیار به‌کارآید. در فضا نمی‌توان‌ازشرق وغرب، یاشمال وجنوب صحبت‌کرد؛ حتی «بالا» و «پایین» هم در فضا معنایی ندارد. ازیك سفینهٔ فضایی، خورشید همیشه دیده می‌شود وبنابراین روز وشبی وجود نخواهدداشت. یا، وقتی‌که بایك ماهواره، زمین رادور می‌زنید، در هر ۲۴ ساعت، به چند «شب» وچند «روز» برخورد می‌کنید. موقعیت‌زمین درفضا، به‌فصل

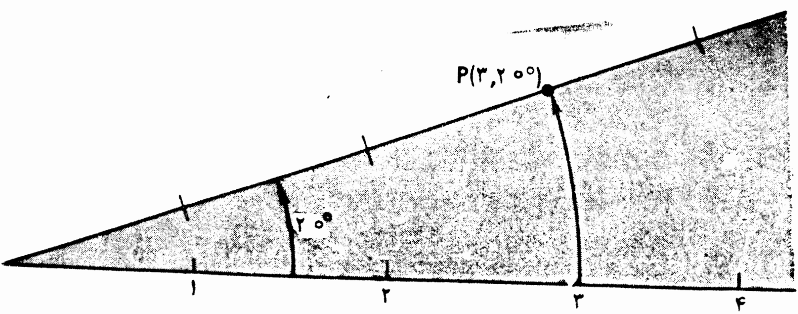
وماه و روز و ساعت بستگی دارد؛ به عبارت دیگر، موقعیت ما به‌زمان مربوط می‌شود. بنابراین، مختصات چهارم فضایی، باید از جنس زمان باشد.

مختصات قطبی

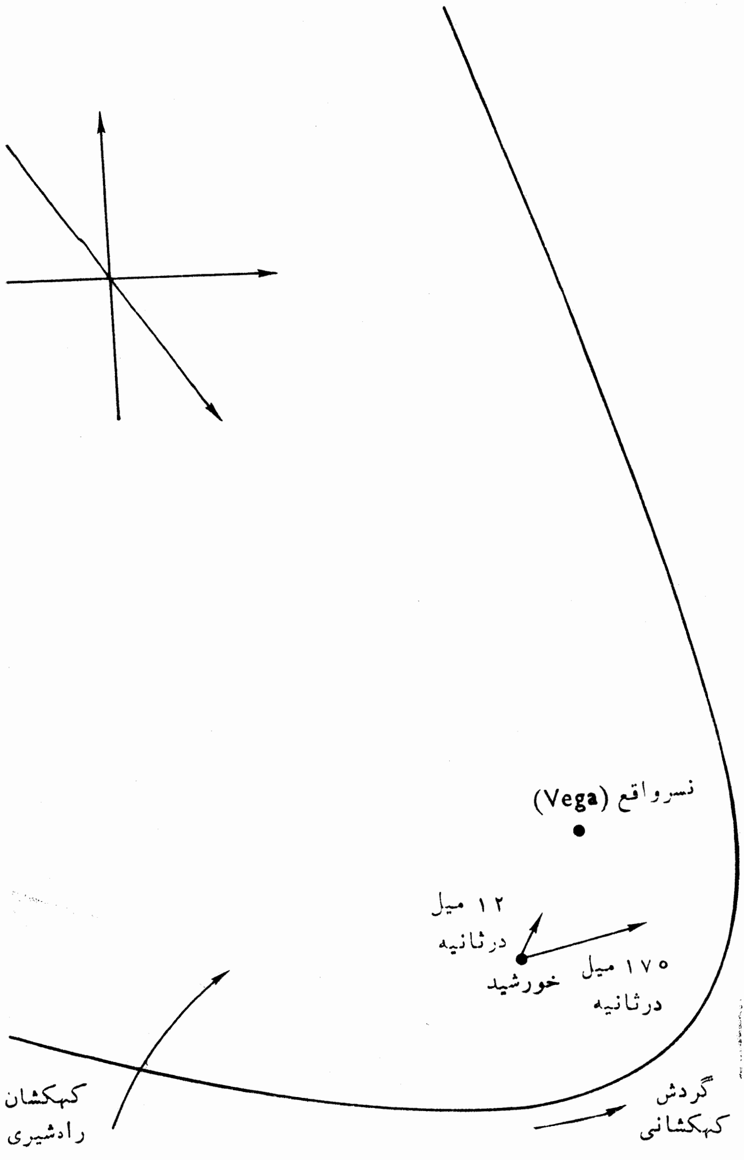
روشی راکه تا اینجا برای‌تعیین جای نقطه درفضا، شرح دادیم، به‌وسیلهٔ «ره‌دکارت»، ریاضیدان فرانسوی ـ که هندسهٔ تحلیلی را درست کرد ـ بنیان‌گذاشته شد و به‌همین مناسبت به دستگاه مختصات دکارتی (یا دستگاه مختصات قـائم) مشهور شده است. ولی، راه دیگری هم، برای تعیین جای‌یك نقطه‌درفضا، وجود داردکه مختصات قطبی نامیده‌می‌شود.

برای تعیین جای یك‌نقطه در صفحه، به‌وسیلهٔ دستگاه مختصات قطبی، بازهم ازیك‌زوج مرتب عددها، مثل $(۳,۲۰^\circ)$، استفاده می کنیم. عضو نخست این زوج مرتب ـ عدد ۳ـ معرف فاصلهٔ نقطهٔ P از مبدأ O (که در اینجا قطب نامیده می‌شود) است. عضودوم ـ ۲۰ درجه ـ اندازهٔ زاویه‌ای را نشان می‌دهدکه OP باامتداد افقی (که در اینجا محورقطبی نامیده می‌شود) می‌سازد (شکل ۱۸).

فاصلهٔ OPرا شعاع‌حامل نقطهٔ P می‌نامندوباحرف یونانی ρ نشان



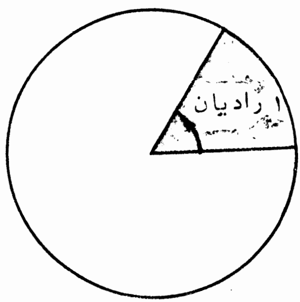
شکل ۱۸


نسرواقع (Vega)
۱۲ میل
درثانیه
۱۷۵ میل
درثانیه
خورشید
کهکشان
رادشیری
گردش
کهکشانی

شکل ۱۹

می‌دهند. اندازهٔ زاویه را هم، معمولاً باواحد رادیان، معین می‌کنند.

زاویهٔ یک‌رادیان، به‌تقریب برابر با ″۴۵′۱۷°۵۷ است. اگر رأس این زاویه در مرکز دایره باشد، ضلعهای آن، کمانی از دایره را جدا می‌کنندکه طولی برابر باطول شعاع دایره داشته باشد. به‌این ترتیب،در ۳۶۰ درجه، به‌اندازهٔ ۲π رادیان وجود دارد، یعنی، مثلاً π رادیان‌برابر ۱۸۰ درجه و $\frac{\pi}{۲}$ رادیان برابر ۹۰ درجه است.



شکل ۲۵

اگر واحد رادیان را به کار ببریم، **مختصات قطبی** نقطهٔ P، در شکل ۱۸، عبارتست از $(۳, \frac{\pi}{۹})$. اگر معادلهٔ منحنیها را، در دستگاه‌قطبی بنویسیم، دربسیاری موارد به رابطهٔ ساده‌تری، در مقایسه با مختصات دکارتی،می‌رسیم. مثلاً،معادلهٔ دایرهٔ $x^۲+y^۲=۲۵$، دردستگاه‌مختصات قطبی، به‌صورت $\rho=۵$ درمی‌آید.

حرکت منظومهٔ شمسی درکهکشان

منظومهٔ شمسی (خورشید، سیاره‌ها و ستاره‌های دنباله‌دار مربوط به‌آن)، متعلق به‌کهکشانی هستندکه‌به‌راه شیری‌معروف است. کهکشان‌ما درفضا به‌صورتی مارپیچ حرکت می‌کندومنظومهٔ شمسی را باسرعتی درحدود ۲۵۰۰۰۰ میل‌درساعت باخود می‌برد. خورشید هم، در داخل این کهکشان، حرکت جداگانه‌ای دارد وبه سمت «بالا» می‌رود تا به‌همسایهٔ خود، ستارهٔ درخشان **نسرواقع**، نزدیک شود.

تمرینهای ۱. جای نقطه در فضا

۱. فاصلهٔ O را تانقطهٔ P، درصفحهٔ دوبعدی پیدا کنید، به‌شرطی که داشته باشیم:

الف) P(۶،۸)　　　ب) P(۵،۱۲)

۲. فاصلهٔ O را تا نقطهٔ P(۳،۴،۱۲) در فضای سه‌بعدی پیدا کنید.

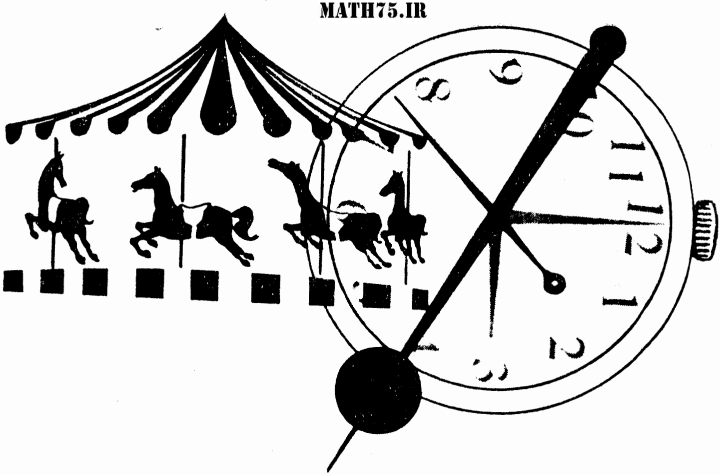
۳. فاصلهٔ O را تا نقطهٔ P(۳،۴،۵،۶)، در فضای چهاربعدی پیدا کنید.

۴. نقطه‌های زیرا را در مختصات قطبی رسم کنید. این نقطه‌ها روی کدام منحنی قرار دارند؟

ρ	۱	۰/۸۷	۰/۷	۰/۵	۰
θ	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°

۵. ورقه‌ای ازآهن سفیدتهیه و از آن سه‌مربع مساوی، جدا کنید. طول ضلع هرمربع را، مثلاً ۱۵ سانتیمتر بگیرید. این مربعها را طوری پهلوی هم بگذارید که به‌وضع سه‌بعدی قرار گیرند (یکی ازمربعهاراافقی و دوتای‌دیگر را درکنار دوضلع مجاور مربع افقی و به صورت عمود بر آن قرار دهید). سپس، بایك مقوای رنگی، صفحهٔ نمایش معادلهٔ $x+y+z=۱۲$ را دراین فضای سه‌بعدی، نمایش دهید.

۶. دومکعب مقوائی درست کنیدو بعدرأسهای متناظر این دومکعب رابانوارهای مقوائی به‌هم وصل کنید. نمایشی ازیك مکعب چهاربعدی خواهیدداشت.



۲. منحنی طرح و نمایش

دایره

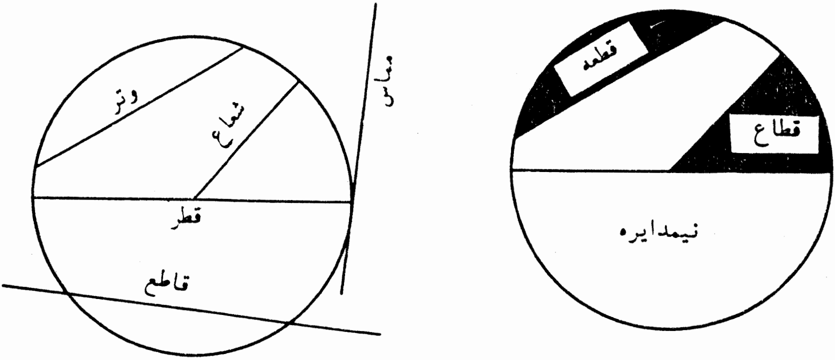
یکی ازمنحنیهای بسیار ساده، که درعین حال بیش ازهمه مورد استعمال دارد، دایره است: چرخ، گردونه، چرخ دنده، صفحهٔ تلفون، سکه و...، اینها چیزهائی است که با تمدن‌ما، بستگی جدی دارد. حرکت دایره‌ای هم بسیارفراوان است: عقربه‌های‌ساعت، انتهای‌آونگ، اسبهای بازی چرخ فلك، کوك ساعت مچی و....، همه یا روی‌تمام دایره و یا قسمتی ازآن، حرکت می‌کنند. وقتی که بایك آدم شوخ روبرو شوید، می‌گوید: خیال می‌کنید چرا به‌این شکل دایره می‌گویند، خوب، روشن است، برای اینکه گرد است. وقتی که از داخل آن می‌خواهید به‌محیط برسید، از هرطرفی‌که بروید فرق نمی‌کند. دایره، نه‌چیزی زیاد دارد و نه‌چیزی کم. اگر در خارج آن باشی، راهی به‌داخل نداری! هیچ طرفی

ازآن، وضع خاصی ندارد، هیچ گوشه‌ای درآن نمی‌توان یافت. البته، یك‌شکل تخم‌مرغی هم، گوشه ندارد؛ ولی، گوشه نداشتن آن، با گوشه نداشتن دایره، خیلی فرق دارد. دایره، خیلی شکل خوبی است، زیرا می‌توان به‌راحتی‌دورآن چرخ‌زد؛ درحالیکه، مثلاً مربع را خیلی‌به‌زحمت می‌توان دور زد. هرجاکه روی محیط دایره باشید، فاصله‌تان تا مرکز فرق نمی‌کند، درحالیکه مثلا روی محیط متوازی‌الاضلاع، چنین وضعی ندارید. هیچ چیز، گردتر ازدایره نیست. هرچیزی را، به هر شکلی که بخواهید درآورید،قبل ازهمه به‌سمت گردی می‌رود...

وقتی‌که یك‌خط منحنی، از یك نقطه آغاز شود وسپس، در پایان خود، به‌همانجا ختم‌شود، منحنی مسدود نامیده می‌شود واگر در اینحالت خودش را قطع نکرده باشد، منحنی مسدود ساده‌است. دایره، ساده‌ترین وعادی‌ترین‌منحنی مسدود وعبارتست ازمجموعهٔ نقطه‌هایی از یك‌صفحه، که فاصلهٔ همهٔ آنها ازنقطه‌ای درونی به‌نام مرکز، یکی باشد.

دایره را با روشهای مختلف می‌توان رسم‌کرد. گاهی از پرگار، برای رسم دایره استفاده می‌کنند وگاهی ازیك تکه‌نخ. دایره را با یك باریکهٔ کاغذ ضخیم یامقوا هم‌می‌توان رسم‌کرد. برای‌این منظور،باریکه مقوا را روی صفحهٔ کاغذ قرار می‌دهیم ودر یکطرف آن سنجاقی فرد می‌کنیم تا آن نقطه را ثابت نگه دارد. سپس، مداد را در طرف دیگر باریکه، در سوراخی‌که قبلا به‌وجود آورده‌ایم، فرو می‌بریم وباریکه‌را دور سنجاق می‌چرخانیم. به این ترتیب، یك دایره رسم می‌شود. طول منحنی‌که دایره‌را تشکیل می‌دهد، محیط‌دایره گویند. اصطلاحهای‌دیگری که دردایره وجود دارد، درشکل ۲۱ دیده می‌شود.

یکی از عددهای بسیار مشهور در ریاضی، π است‌که همه‌جا با



شکل ۲۱

دایره همراه است. پی (π) برابر است با نسبت محیط دایره برقطر آن ($\pi = \frac{C}{d}$). شما می‌توانید مقدار تقریبی عدد π را با تقسیم طول محیط دایره بر قطر آن بدست آورید. اگر در مورد چند دایره، این آزمایش را تکرار کنید، به عدد تقریبی ۳/۱۴ برای عدد π، می‌رسید. یونانیان و مصریان قدیم، عدد ۳ را به جای π به کار می‌بردند. در عهد عتیق هم، جائیکه از عهد سلیمان در فصل هفتم صحبت می‌کند، عدد π را برابر ۳ به حساب آورده است.

ارشمیدس در سدهٔ دوم پیش از میلاد، از یک ۹۶ ضلعی منتظم برای بدست آوردن عدد π استفاده کرد و روشن کرد که عدد π بین دو عدد $۳\frac{۱۰}{۷۰}$ و $۳\frac{۱۰}{۷۱}$ قرار دارد. بطلیموس، درسال ۱۵۰ میلادی، ۳/۱۴۱۶ را برای π در نظر گرفت و چینیها در همان زمانها، برای π از عدد $\sqrt{۱۰}$ یا ۳/۱۶۲۲۸ استفاده می‌کردند. مقدار π تا هفت رقم اعشار چنین است: ۳/۱۴۱۵۹۲۶

امروزه می‌توانند عدد π را به یاری ماشینهای محاسبهٔ الکترونی تا چند هزار رقم بدست آورند. ولی، عدد π را تا هر کجا که حساب کنند، نه هرگز تمام می‌شود و نه به دور منظمی می‌افتد؛ به همین مناسبت π یک

عدد گنگ است.

مقدارعدد π را باروشهای مختلف‌می‌توان بیان کرد. ریاضیدانان، برای این بیان، راههای زیر را پیداکرده‌اند:

$$\pi=۴(۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۹}-\frac{۱}{۱۱}+\frac{۱}{۱۳}\ldots)$$

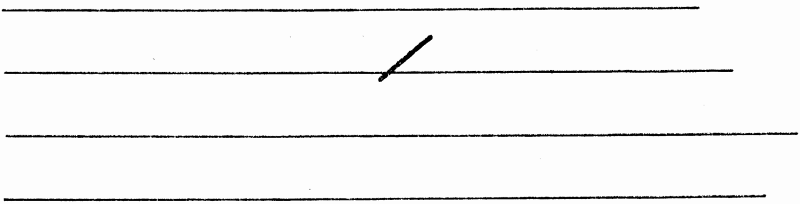
$$\pi=۲\left(\frac{۲^۲\times ۴^۲\times ۶^۲\times ۸^۲\ldots}{۱^۲\times ۳^۲\times ۵^۲\times ۷^۲\ldots}\right)$$

$$\pi=\cfrac{۴}{۱+\cfrac{۱^۲}{۲+\cfrac{۳^۲}{۲+\cfrac{۵^۲}{۲+\cfrac{۷^۲}{۲+\ldots}}}}}$$

وقتی‌که برفرار شهرها پرواز می‌کنیم، راهی‌که در امتداد دایرهٔ عظیمهٔ کرهٔ زمین باشد، کوتاهترین راه است. به‌این مناسبت، فاصلهٔ‌بین دوشهر را ازروی دستور $D=\frac{۲n\pi r}{۱۸۰}$ بدست‌می‌آورند، که‌درآن r ــ شعاع کرهٔ زمین و n ــ اندازهٔ درجهٔ قوس بین دوشهر است.

راه عجیب دیگری هم برای بدست‌آوردن عدد π، به‌کمك‌انداختن قطعه چوبهای‌کوچك بر یك صفحه، وجود دارد: صفحهٔ پهنی انتخاب می‌کنیم وروی آن‌خطهای‌موازی و به‌یك‌فاصله رسم می‌کنیم، شبیه‌کاغذ خطدار. یك‌تکه چوب‌کوچك اننخاب می‌کنیم که طول آن‌درست برابر فاصلهٔ دوخط موازی متوالی‌باشد. این‌قطعه چوب را بارها وبارها، روی کاغذ می‌اندازیم، گاهی خطهای موازی را قطع می‌کند وگاهی بین‌خطها

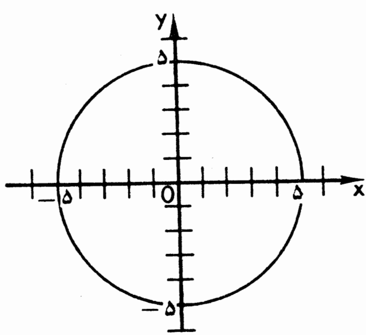
قرار می گیرد وهیچکدام ازآنهارا قطع نمی کند. اگر تعدادکل دفعه‌هائی که‌قطعه‌چوب را انداخته‌ایم، به‌تعداد دفعه‌هائی که یکی ازخطهای‌موازی را قطع کرده است، تقسیم کنیم، عددی نزدیك به $\frac{\pi}{2}$ بدست می آید.



شکل ۲۲

رسم دایره

معادلهٔ دایره عبارتست از $x^{2}+y^{2}=r^{2}$. اگرشما $x^{2}+y^{2}=25$ را رسم کنید، شبیه شکل۲۳ را بدست می‌آوریدکه دایره‌ای باشعاع برابر ۵ وبه مرکز مبدأ مختصات است.

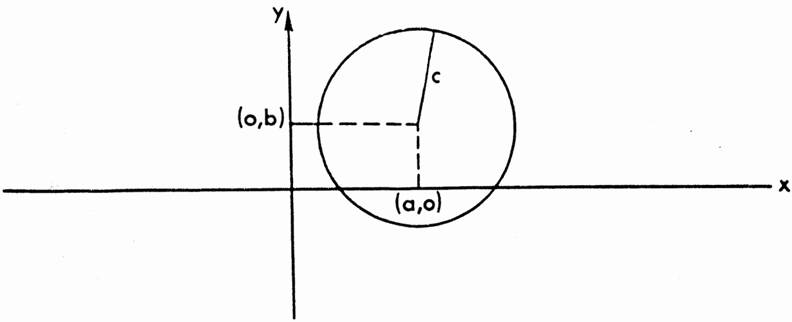


شکل ۲۳

اگر مرکزدایره درجائی‌غیر ازمبدأ مختصات باشد، معادلهٔ آن‌به

اینصورت درمی‌آید:

$$(x-a)^{2}+(y-b)^{2}=c^{2}$$

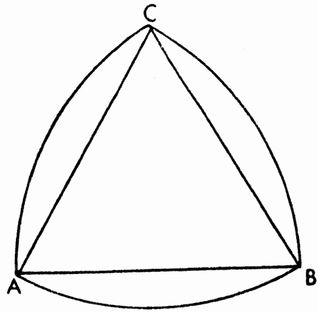


شکل ۲۴

دایره تنها منحنی است که‌شعاع ثابتی‌دارد، ولی، بینهایت‌منحنی باقطر ثابت وجود داردکه بعضی ازآنها، مثل ماسوره، درماشین‌آلات‌به کار می‌روند. چیزهایی‌که قطر ثابتی داشته باشند، می‌توانند بین دوخط موازی، مثل یك چرخ‌گرد، غلط‌بخورند.

ساده‌ترین منحنی باقطر ثابت را می‌توانید بـه‌این ترتیب‌بسازید مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را رسم کنید. به مرکز A وبه‌شعاعAB، قوس BC را رسم‌کنید؛ سپس به‌مرکز B وباهمان شعاع، قوس AC و بالاخره به‌مرکز C وهمان شعاع، قوس AB را. منحنی‌که به‌این‌ترتیب بدست می‌آید، قطری ثـابت دارد؛ پهنای ثـابت آن، همان AB است (شکل ۲۵).

به کمك تختهٔسه‌لائی یا مقوای محکم، دو «چرخ» مساوی، شبیه شکل ۲۵ بسازید وآنها را بایك‌محور به‌هم وصل‌کنید (شبیه محوری‌که



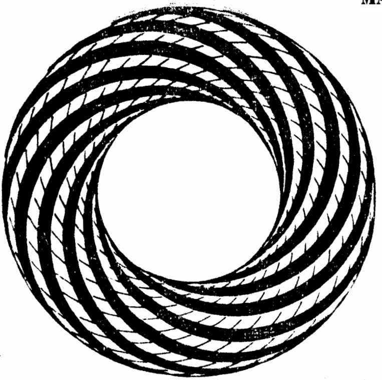
شکل ۲۵

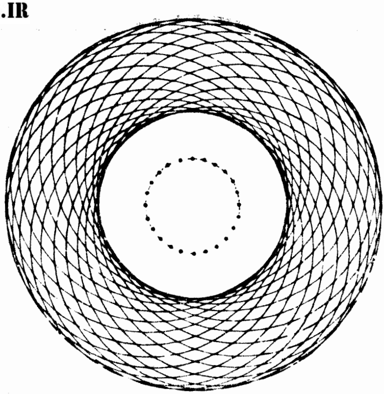
دوچرخ گاری را به‌هم‌وصل می کند)؛ دو صفحهٔ مقوائی‌یکی در زیرو دیگری روی‌این‌چرخها بگذارید. حالا، اگر چرخها رابین این‌دو صفحه‌بچرخانید، فاصلهٔ بین‌صفحه‌ها تغییر نمی کند وبه‌اندازهٔ قطر چرخهاثابت می‌ماند.

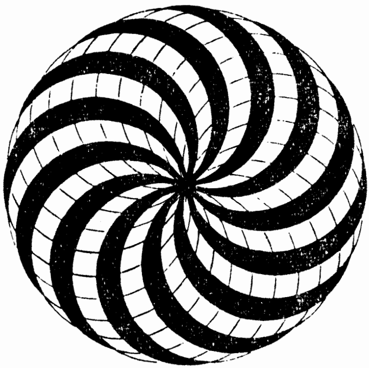
دایره، مبنای‌بسیاری ازشکلها وطـرحهای زیباست، چه آنها که طبیعی‌است وچه‌آنهاکه‌ساخته‌ای‌ازدست‌بشراست. وقتی که‌دایره‌را به‌یاری کمانهایی‌که شعاع آنها برابر باشعاع‌دایره باشد، تقسیم کنیم، شکلهایی به‌غایت زیبا وشگفتی‌آور بدست می‌آید. دایره، زمینهٔ‌کلی همهٔ‌طرحهای زیبای طبیعی است. در صفحهٔ۳۶ تعدادی‌ازشکلهای‌زینتی‌را، که به‌کمك دایره رسم شده‌اند، می‌بینید.

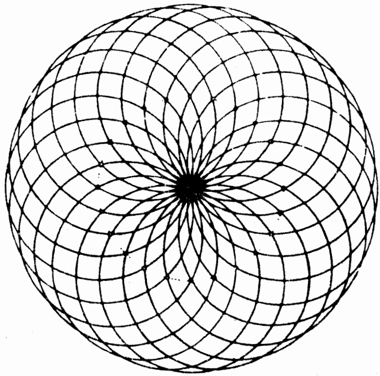
درسال ۱۸۴۶ میلادی، دستگاهی اختراع شدکـه درعین حال هم دایره وهم خط راست‌را رسم می‌کرد. شماهم می‌توانید این‌دستگاه را از روی شکل ۲۶، باهفت‌تکه‌چوب یامقوای‌باریك وچهار لولای‌فلزی‌درست کنید.

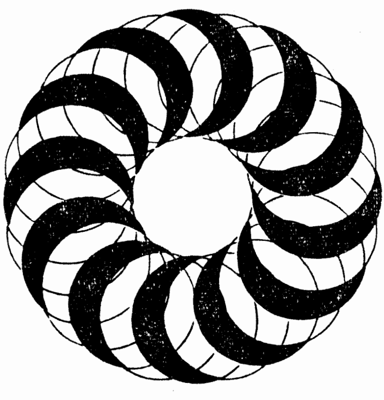
باریکه‌های این‌دستگاه طوری ساخته شده است‌که داشته باشیم:

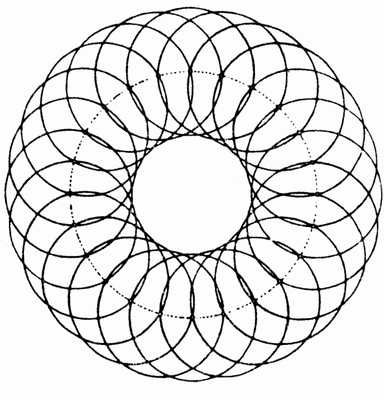


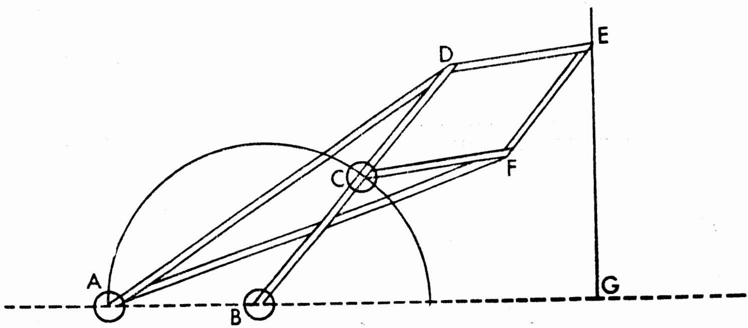












شکل ۲۶

$AD = AF$ و $CD = DE = EF = FC$ و $BC < AD - DC$. این دستگاه، به‌پایه‌ای، ومثلا به‌یك تخته رسم، در نقطه‌های A و B محکم شده است، به نحوی که $AB = BC$ باشد. بازوهای این دستگاه، در نقطه‌های C،D،E وF، به‌وسیلهٔ لولا به‌هم متصل‌شده‌اند، طوری که دستگاه رابتوان دورنقطه‌های A،B،C،D،E وF حرکت داد. وقتی که این دستگاه به‌حرکت درآید، نقطهٔ C، کمان‌دایره را طی‌می‌کند ونقطهٔ E، خط‌راست EG را عمود برAB رسم می‌کند:

تمرینهای ۲. دایره

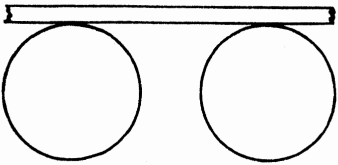
۱. نمودار معادله‌های زیر را رسم‌کنید.

الف) $x^2 + y^2 = 16$

ب) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$

۲. چندچیزگرد انتخاب‌کنید، دربارهٔهرکدام ازآنها طول محیط وقطررا اندازه بگیرد واز راه تقسیم‌آنها بریکدیگر، مقدار تقریبی π رابدست آورید.

۳. کاغذ خط‌داری انتخاب کنید و تکه‌چوبی را که به‌اندازهٔ فاصلهٔ دوخط موازی متوالی است به‌دفعات روی آن بیندازید و از این راه مقدار تقریبی π را محاسبه کنید.



۴. از یک مقوا، نمونه‌ای از یک منحنی با قطر ثابت، درست کنید.

۵. تخته‌ای روی دو تنهٔ گرد درخت قرار دارد. محیط تنهٔ هر کدام از درختها برابر ۴۰ سانتیمتر است.
اگر تنه درختها به‌اندازهٔ یک دور کامل بچرخند، تختهٔ روی آنها، چقدر تغییر مکان می‌دهد. (فرض را بر این می‌گیریم که تنهٔ درختها ضمن چرخیدن، تخته را هم با خود به‌جلو ببرند).

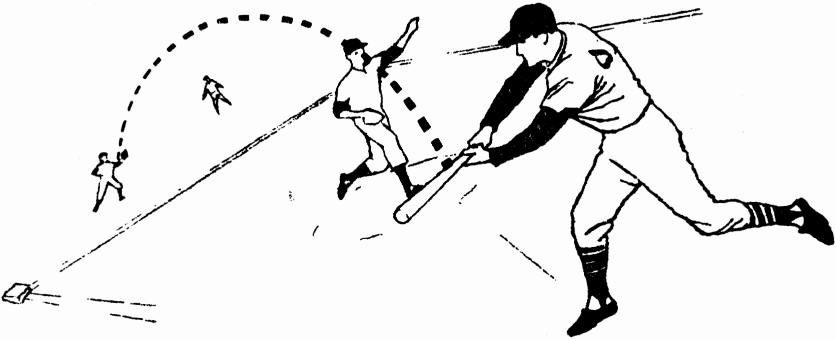
۶. دوسکهٔ ۵ ریالی کنارهم قراردهید، طوری که برهم مماس باشند (مثل شکل مقابل). سکهٔ پایین را ثابت نگه‌دارید و سکهٔ بالا را دور آن بچرخانید، طوری که دائماً برسکهٔ ثابت مماس باشد. وقتی که سکهٔ بالا، درست به‌نقطهٔ مقابل جای اول خودش، درپایین سکهٔ ثابت قرار گیرد. سکهٔ متحرک، دراین مدت، چقدر از دور را زده است؟

۷. یک راه غیرمعمولی برای نصف کردن دایره، رسم این دایره‌هاست:

الف) $x^2+y^2=16$

ب) $(x-2)^2+y^2=4$ (برای مقادیر مثبت x)

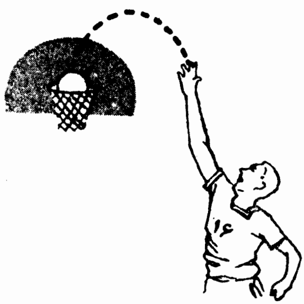
ج) $(x+2)^2+y^2=4$ (برای مقادیر منفی x)



۳. منحنی چیزهایی که سقوط می‌کنند

سهمی

وقتی که چیزی را به هوا پرتاب کنیم، روی منحنی مخصوصی حرکت می‌کند که سهمی نامیده می‌شود. مثلا، توپ بسکت، وقتی که به طرف حلقه پرتاب می‌شود، روی چنین مسیری پیش می‌رود:



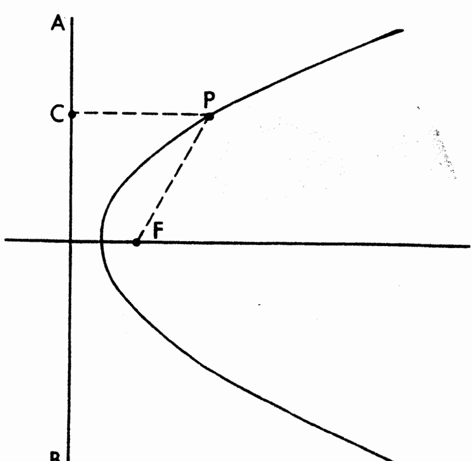
شکل ۲۷

به همین ترتیب، هرچیزی که پرتاب شود، روی منحنی سهمی حرکت

می‌کنند، مثل گلوله‌ای که ازاسلحه خارج می‌شود، آبی که از فوارهٔ مایل بیرون می‌آید، جرقه‌های روشنی که ازاشیاء نورانی ضمن آتش‌بازی پخش می‌شود وغیره.

سهمی، درجاهای دیگری‌هم مثل پلهاوساختمانها، به‌چشم‌می‌خورد؛ چراغ نورافکن دوربین عکاسی و چراغ بالای اتومبیل‌هم به‌شکل سهمی است؛ اگر تیربلندچوبی، دراثر نیروی وزن‌خود خم‌شود، شکل سهمی‌را به‌خود می‌گیرد وغیره.

تعریف این منحنی چیست؟ سهمی عبارتست ازمسیر یك‌نقطه، به نحوی که همواره ازیك نقطهٔ ثابت ـ که کانون نام‌دارد ـ و یك خط ثابت ـ که خط‌هادی نامیده می‌شود ـ به‌یك فاصله باشد. درشکل ۲۸، نقطهٔ F ــ کانون و AB ــ خط هادی سهمی‌است. فاصلهٔ هرنقطهٔ P سهمی‌تاکانون F، برابر است بافاصلهٔ آن تاخط هادی AB: $PF=PC$



شکل ۲۸

نیروی جاذبه و دستورهای مسافرت فضائی

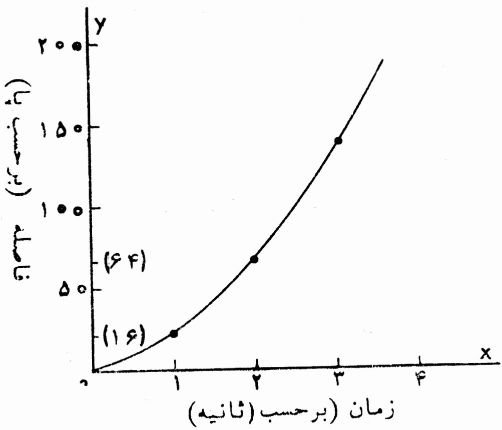
قانونهای عمومی مربوط به جاذبه و حرکت، که به وسیلهٔ ایزاك نیوتون دانشمند انگلیسی کشف شد، بستگی به سهمی پیدا می‌کند. وقتی که سنگی را از روی یك بلندی پرتاب کنیم، منحنی سهمی به خوبی مجسم می‌شود. سنگ طبق جدولی که در اینجا تنظیم شده است، مسیر خود را طی می‌کند:

جدول ۱

زمان t، از لحظهٔ پرتاب سنگ.	مسافت s که در هر کدام از این ثانیه‌ها طی می‌شود.	کل مسافت d که از لحظهٔ پرتاب طی شده است.
۱ ثانیه	۱۶ پا	۱۶ پا
۲ ثانیه	۴۸ پا	۶۴ پا
۳ ثانیه	۸۰ پا	۱۴۴ پا
۴ ثانیه	۱۱۲ پا	۲۵۶ پا
۵ ثانیه	۱۴۴ پا	۴۰۰ پا

اگر مسافت طی شدهٔ d را برحسب پا، با زمان t برحسب ثانیه بسنجیم می‌بینیم که عددهای جدول، با دستور $d = ۱۶t^۲$ تطبیق می‌کند؛ و همانطور که از شکل ۲۹ دیده می‌شود، منحنی چنین معادله‌ای، یك سهمی است.

مسیر هرچیزی که به‌طرف زمین سقوط کند، تابع این معادله است. عدد ۱۶، نمایندهٔ نیروی جاذبه یا ثقل است. وقتی هم که چیزی را به‌طرف هوا پرتاب کنیم، تابع همین قانون است. فرض کنیم گلوله‌ای را با سرعت ۴۸ پا در ثانیه به‌طرف بالا پرتاب کنیم؛ جدول ۲، نتیجهٔ حرکت گلوله را نشان می‌دهد.

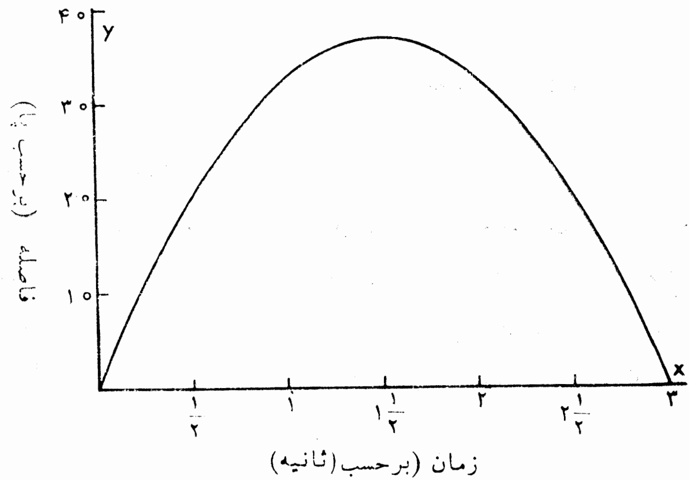


شکل ۲۹

جدول ۲

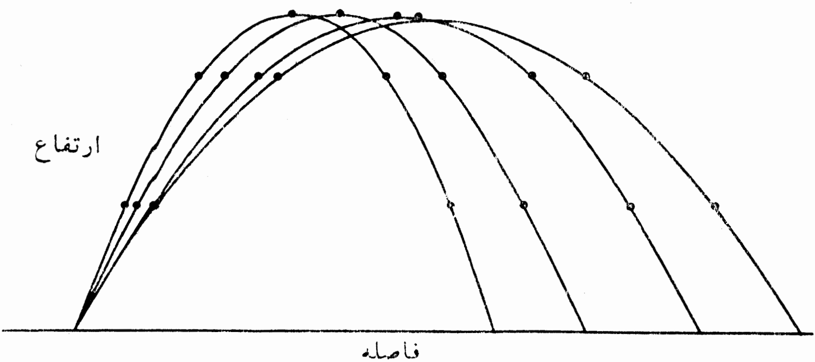
زمانی که گلوله در هواست (t)	مسافتی که گلوله‌درهوا طی‌می‌کند (s)	فاصله‌ای که در $\frac{1}{2}$ ثانیه طی می‌شود (d)
$\frac{1}{2}$ ثانیه	۲۰ پا	۲۰ پا به طرف بالا
۱ ثانیه	۳۲ پا	۱۲ پا به طرف بالا
$1\frac{1}{2}$ ثانیه	۳۶ پا	۴ پا به طرف بالا
۲ ثانیه	۳۲ پا	۴ پا به طرف پایین
$2\frac{1}{2}$ ثانیه	۲۰ پا	۱۲ پا به‌طرف پایین
۳ ثانیه	۰ پا	۲۰ پا به‌طرف پایین

نتیجه‌های این جدول، در دستور $d=vt-16t^2$ صدق می‌کند، که درآن v — سرعت پرتاب گلوله، t — زمانی که گلوله درفضا است، برحسب ثانیه و d — فاصلهٔ گلوله تاسطح افق پرتاب، می‌باشد. منحنی نمایش تغییرات این معادله‌هم، یک سهمی است که در شکل ۳۰ نشان داده شده است:



شکل ۳۰

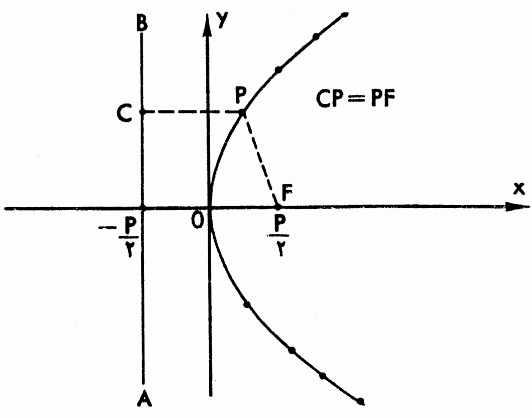
وقتی که گلوله‌ای به‌طرف جلو پرتاب شود، بازهم منحنی مسیرآن، مثل حالتی که به‌طرف بالا پرتاب‌می‌شود، یك سهمی است. اگر گلوله با سرعت افقی u پرتاب شود، معادلهٔ مسیرآن به صورت $y=\frac{u}{v}x-16x^2$ درمی‌آید که x فاصلهٔ افقی طی‌شده و y فاصلهٔ قائم را نشان‌می‌دهد. همین فرمولها هستند که درطرح مربوط به‌پرتاب ماهواره‌ها به‌کار می‌روند.



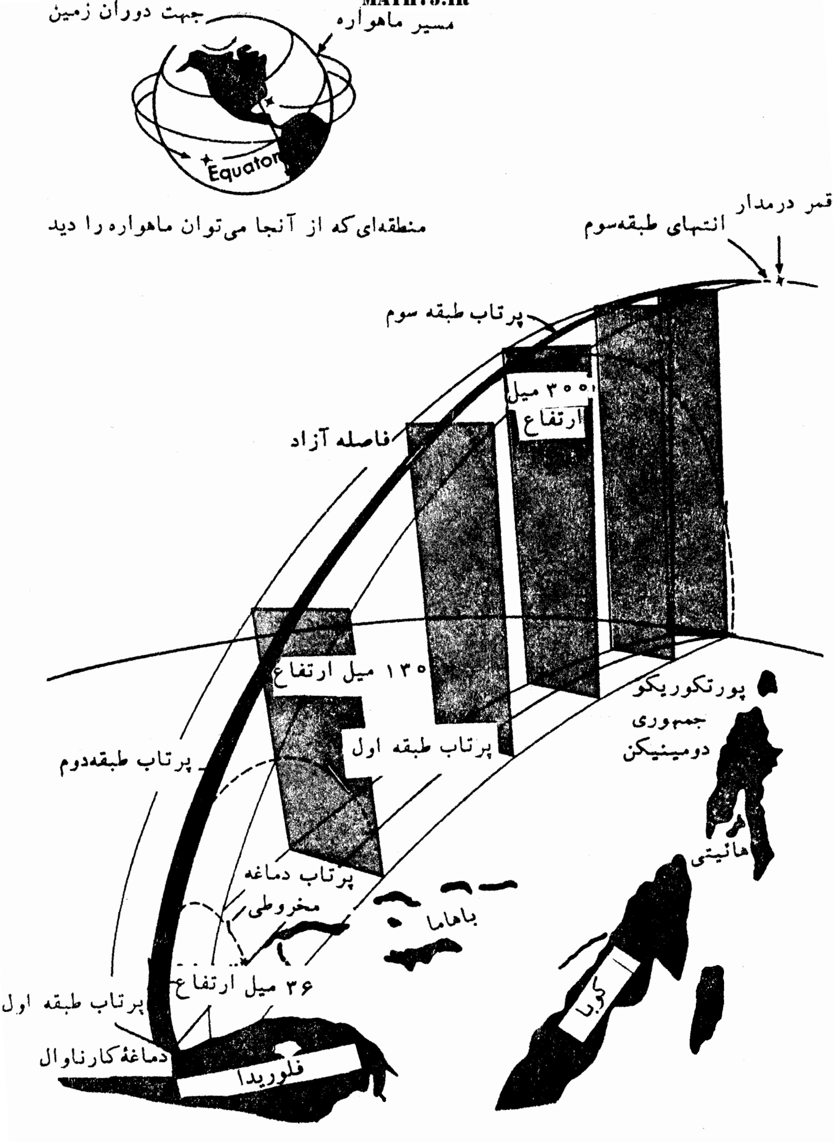
مسیر گلولهٔ توپی که به زاویه‌های مختلف پرتاب شده است
شکل ۳۱

نمودارهای سهمی

دوامتداد مهم درسهمی وجود دارد: محور سهمی و خط هادی آن. درشکل ۳۲، امتداد OF — محورسهمی وامتداد AB — خطهادی آنست. محور، سهمی را به‌دو نیمهٔ مساوی تقسیم می کندو همواره از کانون سهمی می گذرد. خط‌هادی، همیشه برمحورسهمی عمود است. هرنقطهٔ سهمی از



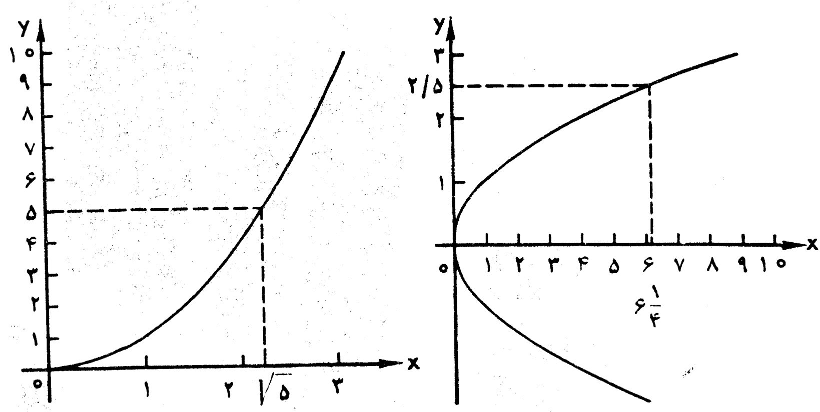
شکل ۳۲


جهت دوران زمین
مسیر ماهواره
Equator
منطقه‌ای که از آنجا می‌توان ماهواره را دید
قمر درمدار
انتهای طبقه‌سوم
پرتاب طبقه سوم
۳۰۰ میل
ارتفاع
فاصله آزاد
۱۳۰ میل ارتفاع
پورتکوریکو
جمهوری
دومینیکن
پرتاب طبقه اول
پرتاب طبقه‌دوم
هائیتی
پرتاب دماغه
مخروطی
باهاما
۳۶ میل ارتفاع
پرتاب طبقه اول
کوبا
دماغهٔ کارناوال
فلوریدا

شکل ۳۳

کانون وخط هادی آن به‌یك‌فاصله است.

معادلهٔ سهمی، یك‌معادلهٔ درجه دوم‌است. یك معادلهٔ ساده برای سهمی $x=y^{2}$، ومعادلهٔ کلیتر برای‌آن $y^{2}=2px$ است. درمعادلهٔ اخیر، مختصات کانون $(\frac{p}{2},0)$ ومعادلهٔ خط‌هادی $x=-\frac{p}{2}$ است. مثلا، درسهمی $y^{2}=6x$ ، مقدار p برابر ۳، معادلهٔ‌خط‌هادی $x=-\frac{3}{2}$ و مختصات کانون آن $(\frac{3}{2},0)$ است.



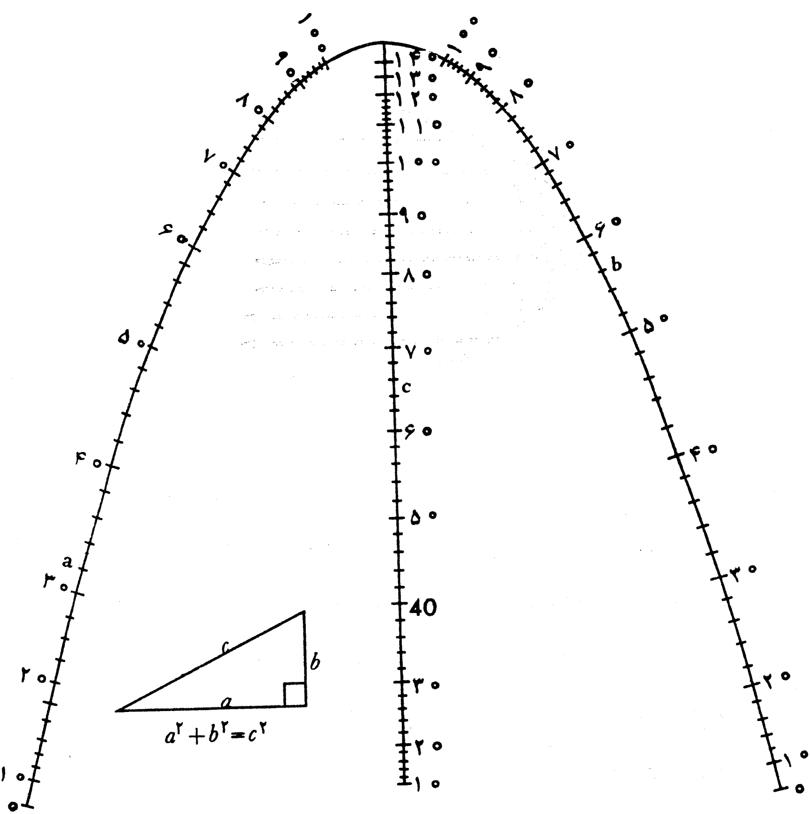
شکل ۳۴   شکل ۳۵

به کمك منحنی سهمی‌می‌توان راهی برای‌محاسبهٔ مجذور عددها، وهمچنین ریشهٔ دوم‌آنها، بدست‌آورد. ازشکل ۳۴ معلوم می‌شودکه $\sqrt{5}$ به‌تقریب برابربا ۲/۲ وازشکل ۳۵ معلوم می‌شودکه $(2/5)^{2}$ به تقریب برابر با۶/۲ است.

به کمك همین منحنی سهمی می‌توان با دردست داشتن دو ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه از مثلث‌قائم‌الزاویه، مقدار وتر آنرا بدست‌آورد. این روش، همانطورکه از شکل ۳۶ پیداست، مبتنی براستفاده ازقضیهٔ

فیثاغورث است: $a^۲+b^۲=c^۲$

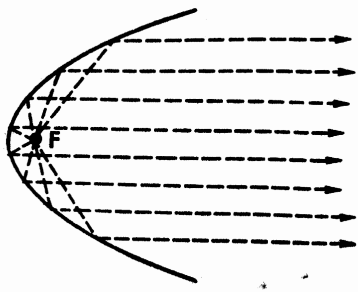
برای بدست‌آوردن وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای که درآن $a=۳۳$ و $b=۵۶$ باشد، ۳۳واحد روی یك‌شاخه و ۵۶ واحد روی شاخهٔ‌دیگرسهمی جدامی‌کنیم. حالا، اگر خط‌کشی را طوری قراردهیم که ازنقطه‌های a وb بگذرد، محل برخورد آن باخط راست مدرج، اندازهٔ ۶۵ رانشان می‌دهد که همان طول وترمثلث قائم‌الزاویه است.



شکل ۳۶

سطحهای سهموی

اگرسهمی را دورمحور خوددوران‌دهیم، سطحی به‌وجودمی‌آورد که به‌سطح منعکس کنندهٔ نورچراغ قوه، شباهت‌دارد. اگر این‌سطح، که سهموی نامیده‌می‌شود، صیقلی باشد، خاصیتهائی شبیه آئینه‌های کروی دارد؛ به‌این معنی که اگـرحباب چـراغ درکانون آن قـرارگیرد، تمام پرتوهائی‌راکه‌به‌سطح‌سهموی‌آئینه‌برخوردکند،به‌موازات‌محورآن‌منعکس می‌کند (شکل ۳۷). چراغهای جلواتومبیل ونـورافکنها، نمونه‌هایی از کاربرد این‌خاصیت‌سهموی هستند.



شکل ۳۷

به‌همین ترتیب، ازسطح سهموی برای تمرکز نورخورشید استفاده می‌شود. پرتوهای موازی کـه ازخورشید می‌رسد، در جهت‌کانون سطح سهموی، منعکس می‌شوند. کارکوره‌های خورشیدی‌هم، به‌همین ترتیب است: وقتی‌کـه منبع‌نور (یعنی خـورشید)، درفـاصلهٔ بینهایت باشد، پرتوهای نوری‌موازی باهم به‌سطح‌آئینهٔ سهمی می‌رسند وحداکثرحرارت را درکانون آن‌متمرکز می‌کنند. درمیدانهای ورزشی (ومثلا میدان‌بازی فوتبال)، میکروفون را درکانون یك سطح بزرگ سهموی‌که در فضای

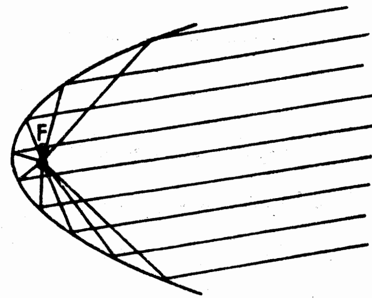
بازی قرارداردّ، می‌گذارند، تا هلهلهٔ تماشاچیان را در استادیوم پخش کنند. به‌همین طریق، پیامهای سفینهٔ فضائی، به وسیلهٔ یك سطح سهموی جمع‌آوری ودرکانون آن متمرکز می‌شود.

یك افسانهٔ قدیمی وجوددارد که بنابر آن، هنگام جنگ سیراکوز باروم، ارشمیدس بااستفاده ازسطح سهموی بزرگی، توانست پرتوهای خورشیدرا روی تجهیزات رومیها، متمرکز کند وآنها را آتش بزنند، واین همان جنگی است، که ارشمیدس درجریان آن کشته‌شد. آلمانیهاهم درجنگ دوم جهانی، نقشهٔ مشابهی طرح کردند تابتوانند باانجام آن، تجهیزات دشمن راآتش بزنند. ولی، عملی‌ساختن این امربسیاردشوار بود، زیراکانون چنین سطحی، که باید روی تجهیزات ومراکزدشمن متمرکز شود، درفاصلهٔ بسیاردوری قرار می‌گرفت وهرقدرهم که فاصلهٔ کانونی افزایش یابد، حرارت متمرکز درکانون، درسطح بیشتری پخش می‌شود ودرنتیجه نیروی خودرا تاحد زیادی ازدست می‌دهد وبه‌همین مناسبت‌هم، این طرح عملی نشد.

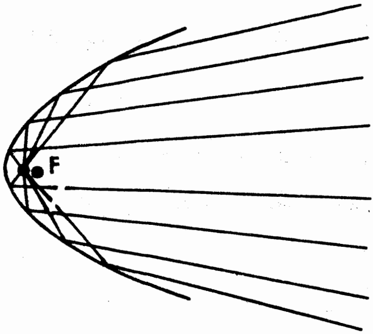
تمرکز نور، در چراغهای بالای جلو اتومبیل، خیلی زیاد است. وقتی که یك حباب کوچك درکانون سطح سهموی چراغ قرارگیرد، حدود ۶۰۰۰ مرتبه، نسبت به‌وقتی که چراغ بدون نورافکن باشد، جاده را روشنتر می کند.

با جابه‌جاکردن حباب چراغ درداخل فضای سهموی، می‌توان وضع تابش‌نور را بررسی کرد. اگر حباب درست درکانون‌سهموی قرارگیرد، پرتوهایی که منعکس می‌شود، کاملاً باهم‌موازی خواهند بود (شکل۳۷).

وقتی‌که حباب چراغ پشت کانون باشد، پرتوهای منعکس‌شده، در فضای بیشتری پخش می‌شود (شکل ۳۸). واگر حباب پایین کانون قرار



شکل ۳۹

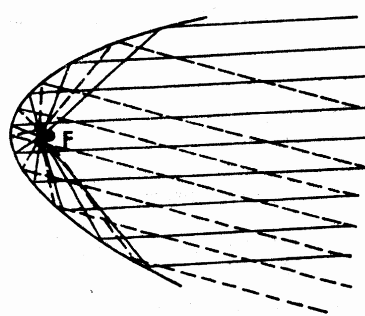


شکل ۳۸

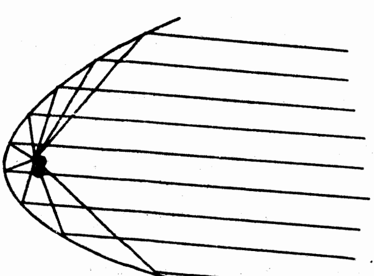
گیرد، پرتوها به‌طرف بالا پخش می‌شود (شکل ۳۹). به‌همین ترتیب، اگر حباب بالای کانون نصب‌شود، نور به‌طرف پایین می‌آید (شکل ۴۰). در اتومبیل، این عمل جابه‌جا کردن حباب چراغ را بافشار روی دکمه‌های مخصوص، انجام می‌دهند (شکل ۴۱).

رسم سهمی

روش ساده‌ای‌برای پیداکردن‌منحنی‌سهمی روی کاغذ وجوددارد:

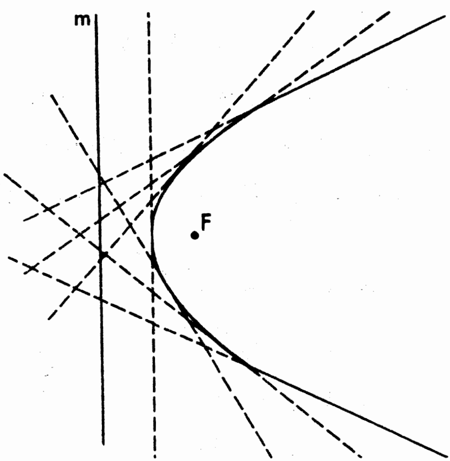


شکل ۴۱



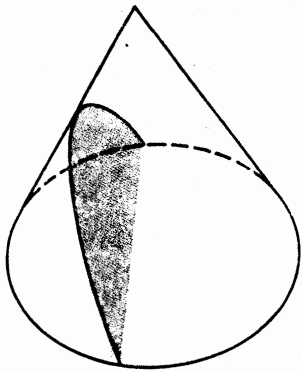
شکل ۴۰

کاغذروغنی شفافی‌انتخاب‌وآنراتا کنید، طوری که‌روی کاغذ خط‌بیندازد. این خط راست، که‌آنرا m می‌نامیم، خط‌هادی سهمی‌خواهدبود. سپس، نقطه‌ای روی صفحهٔ کاغذ وبیرون ازخط‌هادی علامت بگذارید. این‌نقطه، که‌آنرا F می‌نامیم، کانون سهمی‌خواهدبود. حالا، کاغذراطوری‌تا کنید که نقطهٔ F روی خط‌هادی قرار گیرد و کاغذ رافشاردهید تاخط بیندازد. این‌عمل را ۲۰ تا ۳۰ بار، و به‌طریقه‌های مختلف، تکرار کنید. اثرخطهایی که‌حاصل می‌شود،امتداد مماسهای‌بریك‌سهمی را به‌ما می‌دهند، همانطور که درشکل ۴۲ نشان داده شده‌است.



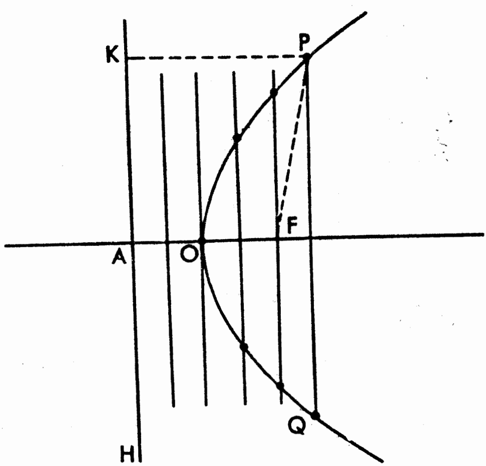
شکل ۴۲

اگریك‌سطح مخروطی را، به‌وسیلهٔ صفحه‌ای‌که بایکی ازمولدهای سطح‌مخروطی موازی است، ببریـم، درمقطع، یك سهمی بدست می‌آید. (شکل ۴۳). بنابراین، سهمی، یك مقطع مخروطی است.

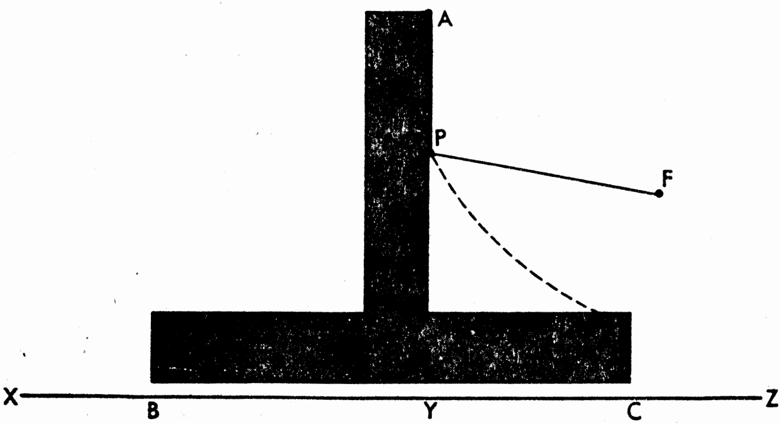


شکل ۴۳

اگـر بخواهیم شکل دقیق سهمی را رسم کنیم، ابتدا، خط‌هـادی KH و کانـون F را، روی کاغذ مشخص می‌کنیم، سپس خطهای راستی موازی خط‌هادی رسم می‌کنیم، آنطورکه درشکل۴۴ دیده می‌شود. حالا، مثلاً برای اینکه نقطه‌های برخورد خط PQ را باسهمی پیدا کنیم، کافی است به‌مرکز F وبه‌شعاع برابر فاصلهٔ این‌خط تاخط هادی، دایره‌ای‌رسم



شکل ۴۴



شکل ۴۵

کنیم؛ این دایره، خط PQ را دردو نقطهٔ P و Q قطع می‌کند که دونقطه از سهمی مورد نظرند. چرا PK=PF ؟

سهمی رابه‌کمك دستگاه ساده‌ای هم که درشکل ۴۵ نشان داده‌شده است، می‌توان رسم کرد. این دستگاه، عبارتست ازیك تخته که به‌شکل T بریده شده (ABC) ویك‌تکه‌نخ که به‌نقطهٔ A بسته‌شده وطولی به‌اندازهٔ AY دارد. دستگاه T می‌تواند در امتداد خطراست XYZ حرکت کند. سرآزاد نخ را به F می‌بندیم؛ اگر، نـوك مدادرا در نقطهٔ P، به‌نخ و T تکیه‌دهیم، به‌نحوی که قطعه‌نخ PF به‌صورت خطراست درآید، نقطهٔ P، نقطه‌ای ازسهمی‌است که XYZ خط‌هادی و F کانون آنست، زیراهمواره PY=PF. حالا، اگر T را روی‌خط XYZ جابه‌جاکنیم، نقطهٔ P، یك سهمی رسم می‌کند.

تمرینهای ۳. سهمی

۱. از روی پلی، سنگی را به‌طرف آب رودخانه رهاکنید، زمانی راکه طول می‌کشد تاسنگ به‌سطح آب برسد، برحسب ثانیه، حساب کنیدو به کمك دستور $S=16t^2$، ببینید ارتفاع پل چند پااست؟

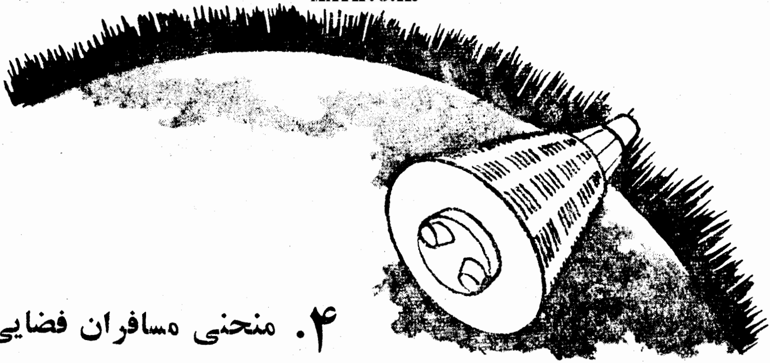
۲. معادلهٔ طاق یك پل $Y=-\frac{9x^2}{80}$ است. کمانی از این منحنی را رسم کنید وسپس شکل پل رابدست آورید.

۳. توپ بسکت، باسرعت اولیهٔ ۳۶ پا در ثانیه پرتاب شده است. درچه لحظه‌ای توپ به ارتفاع ۱۰ پا از بسکت خواهد بود؟ برای این محاسبه، منحنی $d=36t-16t^2$ را رسم کنید.

۴. منحنی هرکدام ازمعادله‌های زیررا رسم کنید. جدول راطوری تکمیل کنیدکه رابطهٔ بین معادله بامنحنی آنرا ببینید:

الف) $y=x^2$	ه) $y=-x^2$
ب) $y=2x^2$	ز) $y=-2x^2$
ج) $y=4x^2$	ح) $y=-4x^2$
د) $y=\frac{1}{2}x^2$	ط) $y=-\frac{1}{2}x^2$

ازکجا می‌توان فهمیدکه سهمی دهانه‌اش به‌طرف بالاست یاپایین؟ ازکجا می‌توان دانست که شکل حاصل پهن و گسترده است یا باشیبی تند؟



۴. منحنی مسافران فضایی

بیضی

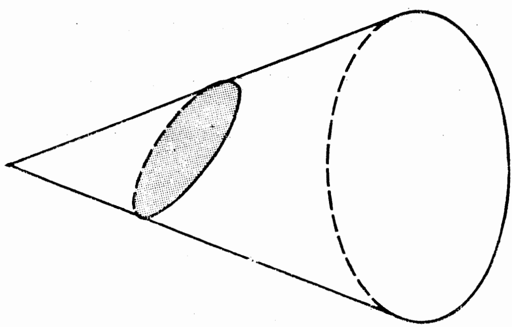
این‌روزها، علاقه وشوق زیادی دربـارهٔ مسافرتهای فضایی وجود دارد. ازاینکه می‌بینیم، یك کیهان‌نورددرسفینهٔ فضائی‌خود، باسرعت۱۷ هزار میل درساعت دورزمین می‌چرخد، دچارشگفتی‌می‌شویم، درحالیکه ما وشما هم‌اکنون خودمان باسرعتی بیش از۱۷ هزار میل درساعت، در فضا درحال حرکتیم.

مسیری‌که ما درفضا طی‌می‌کنیم، نتیجه‌ای ازترکیب چند حرکت است. زمین درهر۲۴ ساعت، یکبار دورمحور خودش می‌چرخد. کسی‌که روی‌خطاستواست، این‌حرکت‌راباسرعت هزارمیل درساعت انجام‌می‌دهد، زیرا خطاستوا درحدود ۲۴ هزارمیل است. درعین‌حال، زمین در هرسال یکبار دورخورشید می‌چرخد وسرعت این‌حرکت هم، حدود ۶۶ هزارمیل درساعت است. علاوه براینها، زمین همراه باتمامی منظومهٔ خورشیدی، دراطراف کهکشان خود سفرمـی‌کند. سرعت این‌حرکت برای مـا معلوم

نیست، ولی بدون تردید خیلی بیش از ۶۶ هزار میل در ساعت است. به‌جز همهٔ اینها، خود کهکشان ماهم در فضای پهناور کیهان، با سرعتی سرسام‌آور درحرکت است. به‌این ترتیب است که همهٔ ما، شناوران کیهانی و مسافران فضایی هستیم که درمسیری بیضی شکل سفر می‌کنیم.

ماشکل بیضی را، به‌فراوانی دایره‌وسهمی، در اطراف خود نمی‌بینیم. گاهی رینگها ومیدانها واستخرهای شنا و یا ظرفهای غذاخوری، بیضی شکل‌اند. ضرب‌المثلی می‌گوید «خربزه را هرجور قاچ کنی، بازهم خربزه است». ولی، درواقع اگرآنرا ازجهتی ببریم دایره‌بدست می‌آید واگر از جهت دیگر ببریم، به‌بیضی می‌رسیم.

بیضی هم، یك مقطع مخروطی است. اگر مخروط را با صفحه‌ای که موازی باقاعدهٔ آن نباشد، قطع کنیم، درمقطع، یك بیضی بدست می‌آید.

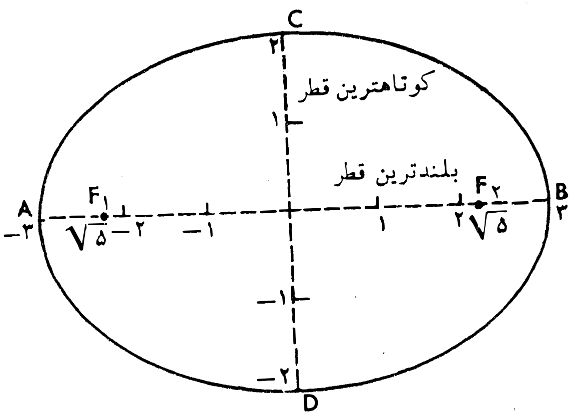


شکل ۴۶

یکی ازمخترعین از بیضی برای ساختن دوچرخهٔ بدون رکاب استفاده کرد. او، چرخ عقب دوچرخه را، به‌جای دایره، به‌شکل بیضی درنظر گرفت، به‌نحوی که راننده می‌توانست باتغییر وضع نشستن خود، چرخ عقب را، بدون اینکه نیازی به‌رکاب‌زدن باشد، به‌حرکت آورد.

شکل بیضی

بیضی، تخم‌مرغی شکل است، مثل دایره‌ای است که پهن شده باشد. اگر دایره تنها یك مرکز دارد، بیضی دارای دو کانون است. اگر قطرهای دایره باهم برابرند، در بیضی طول قطرها باهم تفاوت دارد، که یکی از آنها بلندترین و یکی دیگر کوتاه‌ترین قطر است (شکل ۴۷):



شکل ۴۷

به‌یاد داریم که در تعریف دایره گفتیم: مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه است که از یك نقطه درونی به‌نام مرکز، به‌یك فاصله باشند. حالا، بیضی را تعریف می‌کنیم: بیضی، مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه است که مجموع فاصله‌های هرکدام از آنها تا دو نقطهٔ ثابت درونی، مقداری ثابت باشد.

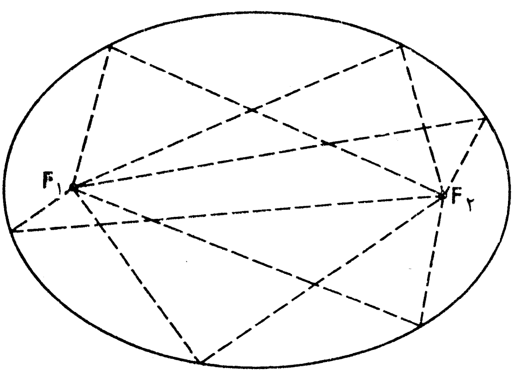
معادلهٔ بیضی، مثلا به صورت $4x^2+9y^2=36$ است که آنرا به صورت $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ هم می‌توان نوشت و نمودار آن، در شکل ۴۷، رسم شده است.

مقادیر ثابتی که دراین معادله وجوددارد، چه‌رابطه‌ای باطول‌قطر بزرگتر دارند؟ با قطر کوچکتر چطور؟ مختصات کانونهای این بیضی عبارتنداز $(\sqrt{5},0)$ و $(-\sqrt{5},0)$ ببینید. چه‌رابطه‌ای بین $\sqrt{5}$ با مقادیر ثابت بیضی وجود دارد؟

صورت کلیتر معادلهٔ بیضی چنین است:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{یا} \quad bx^2+ay^2=a^2b^2$$

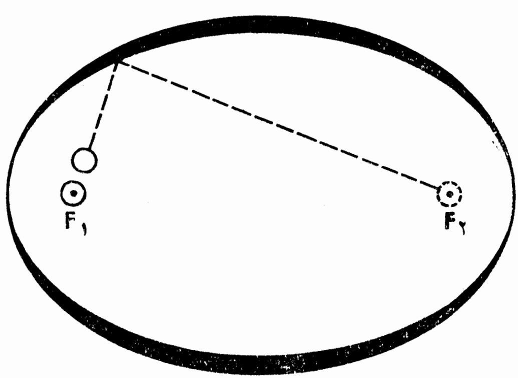
دراین بیضی، مختصات کانونها عبارتند از: $(-\sqrt{a^2-b^2},0)$ و $(\sqrt{a^2-b^2},0)$. ومحورهای x وy، محورهای تقارن این بیضی‌می‌شوند، یعنی محور x برامتداد قطر بزرگتر و محور y برامتداد قطر کوچکتر، منطبق می‌گردد. دراین بیضی، طول قطر بزرگتر برابر $2a$ و طول قطر کوچکتر برابر $2b$ است. بنابراین، درمعادلهٔ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$، خواهیم داشت: $a=3$ و $b=2$. به‌این‌ترتیب، طول قطربزرگتر برابر $2\times 3=6$ وطول قطرکوچکتر برابر $2\times 2=4$ می‌شود.



شکل ۴۸

بیضی، خاصیتهای عجیبی دارد. اگرچراغی را دریکی ازدوکانون بیضی قراردهیم، نورآن درکانون دیگر منعکس می‌شود (شکل۴۸).

در آیداهو ساختمانی وجود داردکه بیضی‌شکل‌است وانعکاس صدا درآن به‌صورت بسیارجالبی است. اگر یك‌سنجاق درروی سکوئی‌که در یکی ازکانونهای بیضی قرار دارد بیفتد، صدای آن درکانون دیگر، که به‌فاصلهٔ دوری ازآن قراردارد، بـه روشنی شنیده می‌شود. شبیه همین خاصیت، درتالارمجلس واشینگتن‌هم‌وجوددارد. چون‌مجموع‌فاصله‌هایی راکه صوت، بعداز برخورد بادیوار بیضوی، طی می‌کنند، مقداری است ثابت وبه‌این‌بستگی‌نداردکه به‌کدام‌نقطهٔ‌دیوار برخوردکنند، همهٔ‌موجهای صوتی باهم درنقطهٔ‌کانون به‌هم می‌رسند وبه‌همین مناسبت است‌که‌کلیهٔ نجواها وگفتگوهایی‌که دریك‌کانون صورت بگیرد، در کانون دیگر به خوبی‌شنیده می‌شود. همچنین، اگر ریگی دریکی ازکانونهای یك استخر بیضوی‌شکل بیفتد، تمام موجهای حاصل، بعد ازبرخورد به‌دیوارهٔ‌استخر به‌طرف کانون‌دوم‌منعکس می‌شوند. این‌نوع انعکاس، در شکل ۴۹ نشان



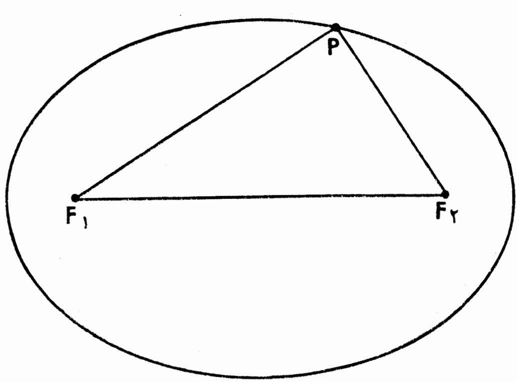
شکل ۴۹

داده شده است.

اگر دو رسطح صاف وهمواری، دیواره‌ای بیضوی شکل به وجود آوریم وبه گلوله‌ای که دریك کانون بیضی قراردارد، ضربه‌ای وارد کنیم، این گلوله بعداز برخورد به دیوارهٔ بیضوی برمی گردد وبه گلوله‌ای که در کانون دوم قراردارد، برخورد می کند.

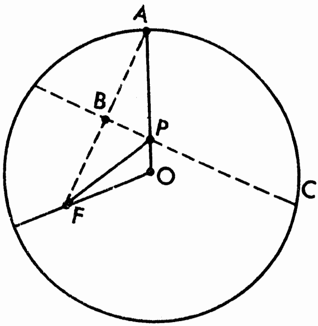
رسم بیضی

یك صفحهٔ کاغذ را روی یك تخته یامقوای صاف با سنجاق محکم کنید. دوسنجاق هم، به جای دوکانون بیضی، روی صفحهٔ کاغذ فروکنید (شکل ۵۰). قطعه نخی راکه طولی کمی بزرگتر ازفاصلهٔ دوکانون داشته باشد، به سنجاقها ببندید. مداد راداخل نخ کنید و آنرا خوب بکشید. در این صورت، اگرمدادرا روی کاغذ تکیه بدهید وبه حرکت درآورید، مسیر مدادکه روی کاغذ، دور کانونها می چرخد، یك بیضی رسم می کند. اگر فاصلهٔ دوکانون، یاطول نخ راکم و زیادکنید، بیضیهای مختلفی به دست می آید.



شکل ۵۰

باتوجه به‌تعریفی که برای بیضی می‌دانید، بگویید چرا شکلی که به‌این ترتیب بدست‌می‌آید، بیضی است؟ این طریقهٔ رسم بیضی بانخ به‌ما نشان می‌دهد که چرا در ناوهای هواپیمابر، منطقهٔ عمل هواپیماها روی باند کشتی ـ به شرطی که بادنباشد ـ یك بیضی است.



شکل ۵۱

بیضی را با تاکردن یك کاغذ روغنی هم‌می‌توان رسم کرد. دایره‌ای به مرکز O روی کاغذ رسم کنید، نقطه‌ای‌مانند F، غیراز O، در داخل دایـره انتخاب کنید. حـالا، صفحهٔ کاغذرا طوری تاکنیدکه نقطهٔFروی محیط دایره‌قرارگیرد (مثل نقطهٔA).

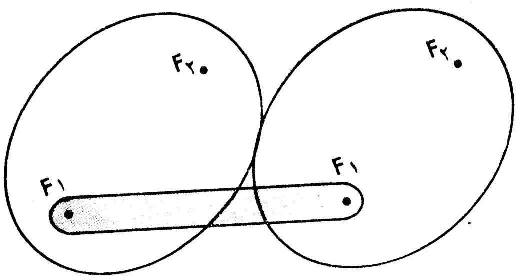
اگرکاغذ را روی جایی‌کـه تـاشده است فشار دهید، خطی مانند BC به وجود مـی‌آوردکـه عمود منصف FA است (شکل ۵۱). نقطهٔ P، محل برخورداین‌عمودمنصف‌باشعاع OA، ازدونقطهٔ A و F به‌یك‌فاصله‌است، یعنی $PF=PA$. ازآنجا خواهیم داشت:

$$PF+PO=PA+PO=OA$$

یعنی $PF+PO$ برابر باشعاع دایره ودر نتیجه، مقداری ثـابت است. به‌این ترتیب، نقطهٔ P یکی از نقطه‌های محیط بیضی به‌کانونهای F وO است. اگر عمل تاکردن را، به نحوی‌که دیدیم، به دفعات تکرار کنیم، مجموعهٔ نقطه‌های P ، محیط یك بیضی راتشکیل خواهد داد. ضمناً خط AC وخطهای شبیه‌آن، که از تاکردن کاغذ بدست می‌آید، خطهای

مماس بر بیضی هستند، زیرا داریم: $\widehat{FPB}=\widehat{BPA}=\widehat{OPC}$

شاید به‌نظر عجیب بیاید که چرخ دنده‌ها را می‌توان بیضی شکل ساخت. اگر دوچرخ دندهٔ بیضی‌شکل دور محوری، که‌از یك کانون چرخ اول ویك کانون چرخ دوم می‌گذرد، گردش کند، دنده‌های آنها دائماً در هم فروخواهند رفت وچرخ دنده‌ها به‌راحتی‌خواهند چرخید (شکل ۵۲).



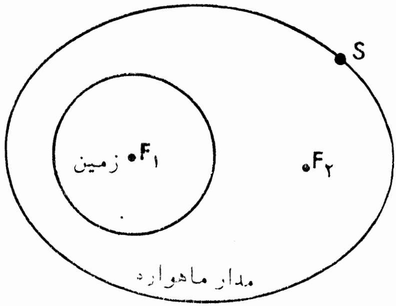
شکل ۵۲

این نوع دنده‌ها، یك حرکت یکنواخت دورانی را به‌حرکت یکنواخت دورانی تندتر یاکندتر تبدیل می‌کنند ومعمولا در ماشینهایی به‌کار برده می‌شوند که یك حرکت تندیکنواخت، بابرگشت آرام یکنواخت، لازم باشد. سعی کنید، شبیه این چرخ دنده را بامقوا درست کنید. دو کانونی را که محورگردش ازآنها نمی‌گذرد، بامیله‌ای که برابرقطر بزرگتر بیضی است، به‌هم وصل کنید تاحرکت را منظم کند.

مدارهای بیضی شکل ومسافرت فضایی

ماهواره‌ای که به‌دور زمین درحرکت است، روی یك مسیر بیضی

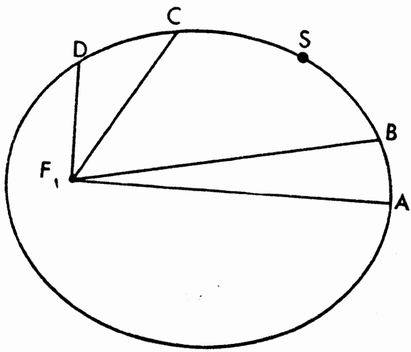
شکل حرکت می‌کنند، به‌نحوی‌که مرکز زمین درست بریکی ازکانونهای این بیضی قراردارد. شکل ۵۳، وضع را به‌شما نشان می‌دهد:



شکل ۵۳

یوهان کپلر، اخترشناس آلمانی، نخستین‌کسی بود که کشف کرد، سیاره‌ها روی‌یك مدار بیضی شکل، به‌دور خورشید حرکت می‌کنند. کپلر خاصیت مهم دیگری را هم کشف کرد، یعنی اینکه سرعت‌مسیر یك‌سیاره روی مدارش‌ثابت‌نیست. به‌این معناکه‌سیاره، دربعضی ازقسمتهای‌مسیر خود تندتر و در بعضی قسمتهای دیگر، کندتر حرکت می‌کند. قانون دومی راکه کپلر کشف کرد، به‌این‌ترتیب بیان می‌شود: اگر سیاره را به وسیلهٔ یك‌خط راست به‌مرکز زمین وصل‌کنیم، مساحتی راکه این شعاع درزمانهای‌مساوی طی‌می‌کند،یکی‌است. مثلا، اگر فرض‌کنیم که‌سیاره‌ای دریکساعت فاصلهٔ بین A تا B را طی‌کند و برای رسیدن از نقطهٔ C به نقطهٔ D هم، یکساعت طول بکشد، مساحت سطحهای AF_1B و CF_1D برابرند (شکل ۵۴). ازهمین‌جا معلوم می‌شود‌که چون سیاره باید فاصلهٔ بیشتر کمان CD را، درهمان‌زمانی‌طی‌کندکه فاصلهٔ کمان کوچکتر AB

را طی کرده بود، روشن است که این سیاره، فاصلهٔ بین C تا D راتندتر ازفاصلهٔبین A تا B طی کرده‌است. درموردماهواره‌ها هم‌همینطور است: هرچه ماهواره‌به مرکز زمین نزدیکتر باشد، سرعت‌بیشتری‌دارد و به‌همان ترتیب که ازمرکز زمین دورتر می‌شود، از سرعتش کم می‌شود.



شکل ۵۴

اگر زمان یك‌دور حرکت انتقالی سیاره را بـا حرف T و فاصلهٔ متوسط آنرا تاخورشید بـا حرف D نشان دهیم، مقدار K که از رابطهٔ $\frac{T^2}{D^3}=K$ به‌دست می‌آید، برای همهٔ سیاره‌هـا یکی است. بـرای زمین، که ۹۳ $=D$ میلیون‌میل و ۱ $=T$ سال است، مقدار K را حساب‌کنید. ازهمین دستور برای سیاره‌های دیگر، مانند مریخ وزهره‌هم استفاده‌کنید و ثابت‌کنید که برای همهٔ سیاره‌ها، مقدار K تقریباً یکی درمی‌آید.

کپلر، وقتی‌که دید می‌تواند قانونهای حاکم برجهان را به وسیلهٔ دستورهای ریاضی ومنحنیهای‌هندسی بیان‌کند، بسیار خوشحال شد. او مردی مذهبی بود و باکشف ریاضی خود، قانع شدکه در دستگاه خلقت خداوندی، هم‌آهنگی ونظم وجود دارد، او به‌خود می‌بالیدکـه توانسته

است قانون لایزال خلقت را کشف کند.

تمرینهای ۴. بیضی

۱. در بیضیهای زیر، طول قطرهای بزرگتر و کوچکتر و همچنین مختصات کانونها را پیدا کنید.

الف) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ ب) $25x^2+36y^2=900$،

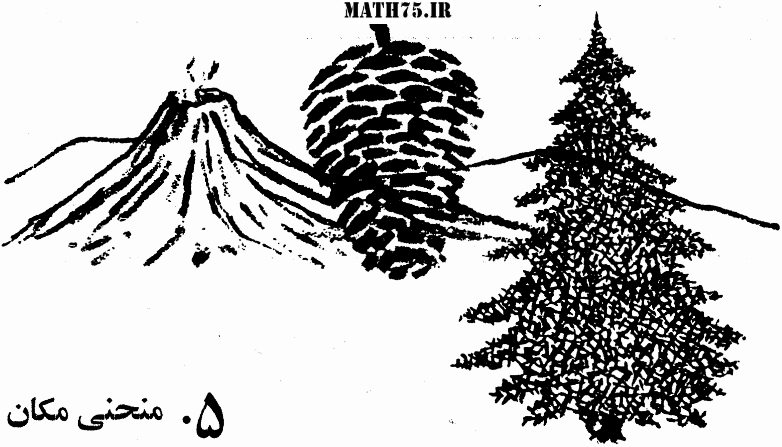
ج) $x^2+4y^2=4$،   د) $x^2+y^2=49$

۲. مسافتی را که ما در هرشبانه روز، دور خورشید طی می‌کنیم به‌دست آورید. مسیر زمین را دایره‌ای به‌شعاع ۹۳ میلیون میل درنظر بگیرید.

۳. چراغ قوه‌ای را روشن کنید و نور مخروطی آنرا روی دیوار صافی بیندازید. وقتی چراغ‌قوه را، نسبت به‌دیوار، با زاویه‌های مختلف بگیریم، روی دیوار دایره، بیضی، سهمی یاهذلولی دیده می‌شود. با روش دیگری هم می‌توان، مقطعهای مخروطی را نشان‌داد: مایعی رنگی درظرفی مخروطی شکل بریزید و آنرا با زاویه‌های مختلف، کج و راست کنید. سطح مایع رنگی درظرف، شکلهای مختلف مقطعهای مخروطی را، نشان خواهد داد.

۴. نمونه‌هایی ازبیضی را در آگهیها، ساختمانها، باغچه‌ها و غیر آن پیدا کنید.

۵. آیا می‌دانید بیضوی یعنی چه؟ به‌کنار رودخانه یا ساحل دریا بروید و سنگی به‌شکل بیضوی پیدا کنید.



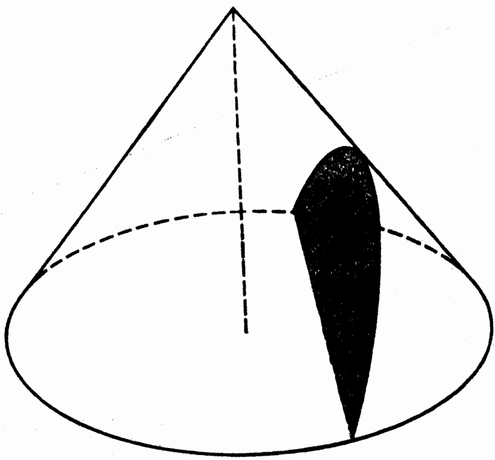
۵. منحنی مکان

هذلولی

مخروط، شکلی عادی و عمومی است که همیشه با آن روبه‌رو می‌شویم. بستنی‌قیفی، خود قیف وبعضی پشت بامها و برجها، به شکل مخروط هستند. مخروط، یکی‌ازشکلهای‌عادی‌طبیعت است. درخت کاج که‌پیروان مسیح به‌آن علاقه دارند و در جشن تولد مسیح، آنـرا تزیین می کنند ـ میوهٔ کاج، قلهٔ کوهستانهای آتشفشانی‌وامثال آن، همه‌مخروطی شکل‌اند. مخروط را می‌توان هرمی‌دانست که تعداد ضلعهای‌قاعدهٔ آن، بینهایت باشد.

اگر بدنهٔ یك مخروط (یـا بـه‌اصطلاح ریاضیدانـان ـ یك سطح مخروطی) را، با صفحه‌ای موازی ارتفاع آن، قطع کنیم، مرزی که روی بدنهٔ مخروط پیدامی‌شود، یك‌هذلولی است. بنابراین، هذلولی هم، یکی ازمقطعهای مخروطی است (شکل ۵۵).

کپلر، اخترشناس آلمانی، نشان دادکه مسیرزمین به‌دورخورشید،

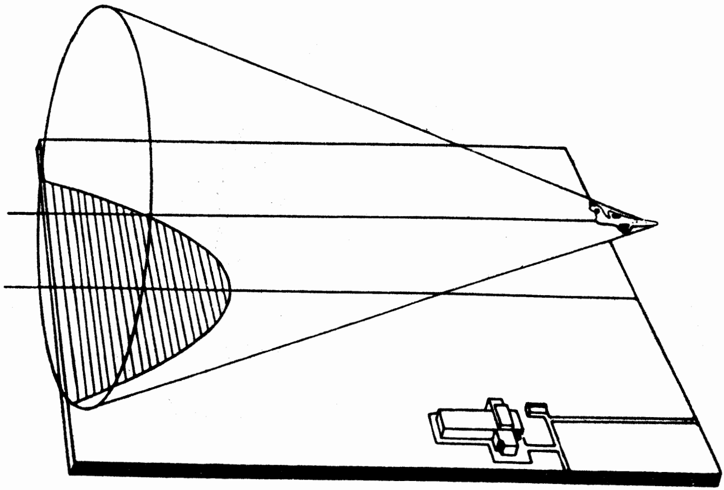


شکل ۵۵

به‌شکل بیضی است، ولی، ستاره‌های دنباله‌دار، درمسیری که دردستگاه خورشیدی دارند، روی یك‌هذلولی‌حرکت‌می‌کنند. دریانوردان هم،برای مشخص کردن موقعیت‌خودشان‌دردریا، ازمنحنی‌هذلولی استفاده‌می‌کنند. شاید، فضانوردان هم ناچار باشند درآینده، برای تعیین محل خود، از مقطعهای مخروطی استفاده‌کنند.

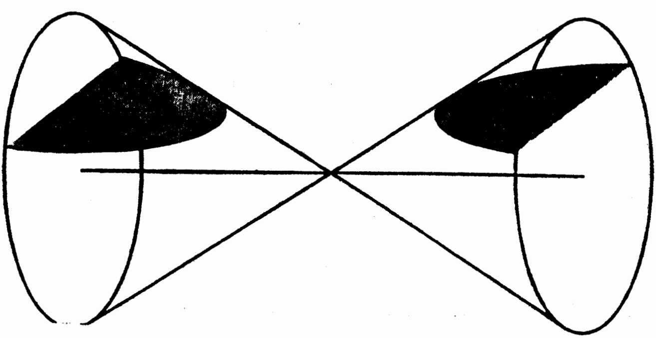
دیوار صوتی یك‌جت مافوق صوت، یك‌مخروط است‌که مقطع‌آن بازمین، یك هذلولی رابه‌وجودمی‌آورد.صدای‌غرش‌جت، درتمام‌نقطه‌های این هذلولی وتمام نقطه‌های داخل‌آن، شنیده می‌شود. شکل ۵۶ نشان می‌دهدکه چطور پس ازعبور جت، نقطه‌های‌واقع درروی زمین، درداخل مخروط صدا قرار می‌گیرد.

منحنی هذلولی، دوشاخه دارد، واین دو شاخه، از برخورد یك مخروط‌کامل دوار با یك صفحه، به‌دست می‌آید(شکل ۵۷). منظور از



شکل ۵۶

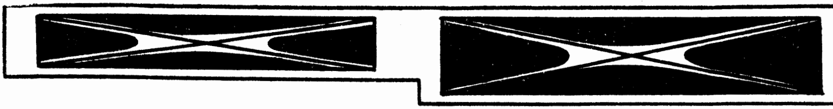
مخروط کامل، جسمی است شامل دومخروط، که رأسهای آنها بـرهم و مولدهای آنها، درامتداد یکدیگر، قرارگرفته باشد.



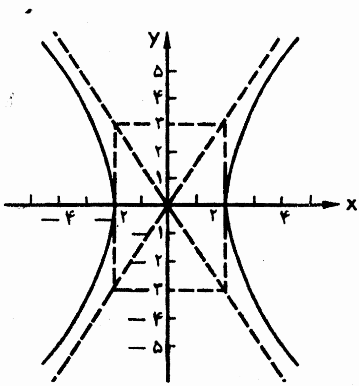
شکل ۵۷

منحنی هذلولی

هذلولی، مثل بیضی‌دارای دو کانون است و دو محورتقارن‌دارد.



منحنی نمایش معادلهٔ $9x^2-4y^2=36$ ، یك‌هذلولی است، که‌درشکل ۵۸ نشان داده شده است:



شکل ۵۸

این‌معادله را به‌صورت $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ هم می‌توان‌نوشت. ببینید، مقادیر ثابت این‌معادله چه‌رابطه‌ای باکانونها دارند؟

معادلهٔ‌کلی یك هذلولی چنین است:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{یا} \quad b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

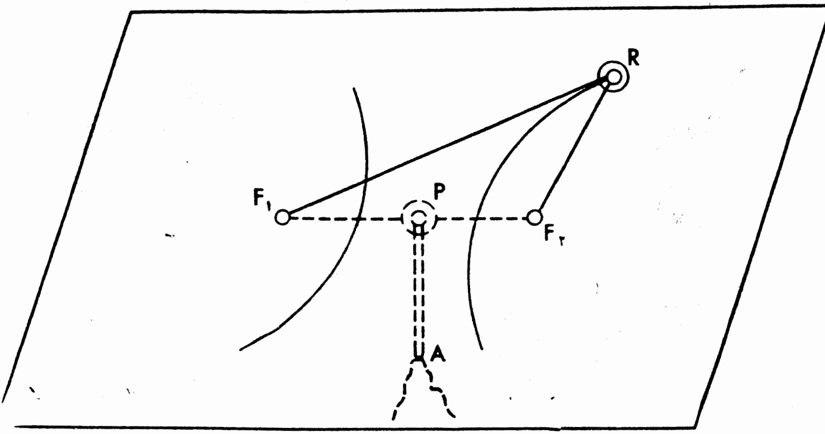
در این معادله، مختصات کانونها $(\pm\sqrt{a^2+b^2},0)$ و مختصات رأسها $(\pm a,0)$ است. به‌هذلولی، دوخطجالب مربوط می‌شودکه به‌آنها خطهای مجانب گویند. هرچه‌منحنی‌ازمبداء دورتر شود وبه‌سمت بینهایت برود، مجانبها به‌آن نزدیکترمی‌شوند، ولی هرگز به‌آن نمی‌رسند؛ یعنی،

خطهای مجانب، نه منحنی را قطع می‌کنند و نه بر آن مماس‌اند. اگر مستطیلی رسم کنیم که معادلهٔ ضلعهای آن چنین باشد: $x=\pm a$ و $y=\pm b$؛ دراینصورت، امتدادقطرهای این مستطیل، امتداد خطهای مجانب هذلولی خواهد بود. معادلهٔ این خطهای مجانب چنین است: $y=\frac{b}{a}x$ و $y=-\frac{b}{a}x$. در هذلولی شکل ۵۸، مختصات کانونها $(\pm\sqrt{۴+۹}, ۰)$ یا $(\sqrt{۱۳}, ۰)$ و $(-\sqrt{۱۳}, ۰)$، مختصات رأسها $(۲, ۰)$ و $(-۲, ۰)$، و معادلهٔ مجانبها $y=\frac{۳}{۲}x$ و $y=-\frac{۳}{۲}x$ می‌باشد.

در واقع، هذلولی عبارتست ازمکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه، که تفاضل فاصله‌های آنها تا دونقطهٔ ثابت، به نام کانونها، مقدار ثابتی باشد. درحالتی که‌مجانبهای هذلولی، خودمحورهای x و y باشند، معادلهٔ هذلولی به‌صورت $xy=c$ درمی‌آید.

رسم هذلولی

هذلولی را می‌توان به‌کمك دستگاه ساده‌ای که ازیك تکه‌نخ و یك مداد درست شده‌است، رسم کرد. برای سهولت کار، یك‌تخته رسم و دو حلقه هم به‌این دستگاه اضافه می‌کنیم. تخته‌رسم، در نقطه‌های F_1 و F_2 (کانونهای هذلولی)، سوراخ‌دارد. حلقهٔ R را به‌میانهٔ تکه‌نخ می‌بندیم؛ یك سرنخ را ازسوراخ F_1 و سردیگر آنرا از سوراخ F_2 می‌گذرانیم و آنها را در زیرتخته رسم، ازحلقهٔ‌دیگر P عبور می‌دهیم وبا انگشت‌دست چپ ـ آنطورکه درشکل ۵۹ دیده می‌شود ـ نگاه می‌داریم.



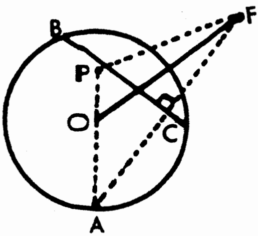
شکل ۵۹

برای رسم هذلولی، مداد را ـ که در حلقهٔ R داخل شده است ـ با دست راست روی کاغذ حرکت می‌دهیم. به هراندازه‌که نخ از سوراخ F_1 بیرون‌بیاید، به‌همان اندازه ازسوراخ F_2 خارج‌می‌شود، به‌نحوی‌که همیشه تفاضل فاصله‌های نقطهٔ R تا F_1 و F_2، ثابت می‌ماند. به این ترتیب،یکی ازشاخه‌های‌هذلولی‌رسم‌می‌شودوروشن‌است‌که برای‌رسم‌شاخهٔ دوم آن، کافی است جای حلقهٔ R را عوض کنیم.

این‌عمل راروی‌تخته‌کلاس هم‌می‌توان انجام داد. برای‌این‌منظور، دوقطعه چوب سوراخ‌دار، به جای کانونها، قرار می‌دهیم (می‌توان این قطعه چوبها را بادست نگه‌داشت ویا به‌وسیلهٔ لاستیکهای فرورفته‌ای‌که به‌زیرآنها چسبانده‌ایم، روی‌تخته‌کلاس‌محکم‌کرد)، وبعدیك‌وزنهٔ‌کوچك (در حدود ۲۵۰ گرم)، به‌نخ آویزان می‌کنیم وگچ را در نقطه‌ای ازنخ محکم می‌کنیم. وقتی که‌گچ را روی تخته به حرکت آوریم، یکی از

شاخه‌های هذلولی رسم می‌شود وبا تغییر وضع نخ، شاخهٔ دوم‌هم به‌دست می‌آید. باتغییر محل گچ و یا تغییر فاصلهٔ کانونها، هذلولیهای مختلف به‌دست می‌آید که می‌توان آنها رابا هم مقایسه‌کرد.

هذلولی‌را به‌کمك کاغذ‌معمولی هم می‌توان رسم کرد. روی کاغذ، دایره‌ای به‌مرکز O رسم می‌کنیم ونقطه‌ای مانند F درخارج آن نشان می‌گذاریم. حالا، کاغذ را طوری تامی‌کنیم که نقطهٔ F روی محیط‌دایره قرارگیرد وبافشارخط تای‌کاغذ را ظاهر می‌کنیم. این عمل‌را ــ همانطور که درمورد بیضی هم‌دیدیم ــ چندبارتکرار می‌کنیم. هرکدام ازخطهای تای‌کاغذ، مماسی است برهذلولی مطلوب که‌دونقطهٔ O و F، کانونهای آن هستند.



شکل ۶۰

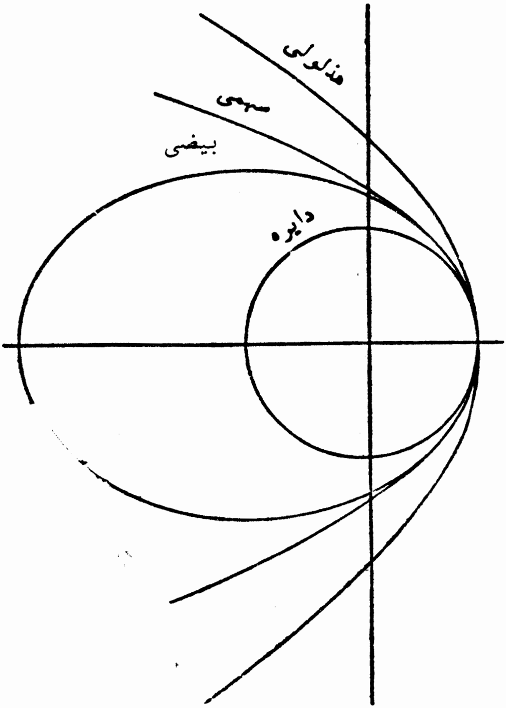
درشکل ۶۰، چون BC عمود منصف FA است، بنابراین PF=PA واز آنجا

$$PF-PO=PA-PO=R$$

یعنی تفاضل PF−PO، برابر باشعاع دایره، ومقداری ثابت‌است.

ستارگان دنباله‌دار، یا شبگردانی موقت‌اند و یا جزو عضوهای دائمی‌خانوادهٔ خورشیدند. بازگشت آنها، واینکه حرکتی به‌دورخورشید داشته باشند، بستگی به‌سرعت آنها دارد. این‌ستارگان دنباله‌دار، معمولا روی مسیر بیضی‌شکل حرکت می‌کنند، ولی اگر سرعت‌آنها از ۲۶ میل

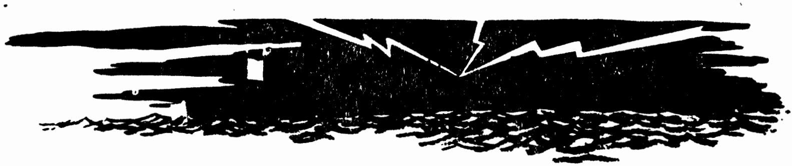
در ثانیه، اندکی تجاوز کند روی مسیر سهمی می‌افتند وطبیعی است که در اینصورت، مسیر آنها هرگز بسته نمی‌شود؛ واگر سرعت، از این حدهم تجاوز کند، مسیر حرکت ستاره به‌صورت هذلولی در می‌آید.



شکل ۶۱

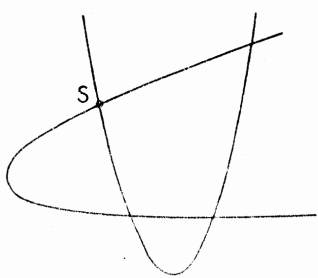
هذلولی در دریانوردی

رابطهٔ بین کانونها ونقطه‌های هذلولی در دریانوردی، در دستگاهی مورد استفاده قرار می‌گیرد که لوران LORAN نامیده می‌شود (Long Range Navigation).



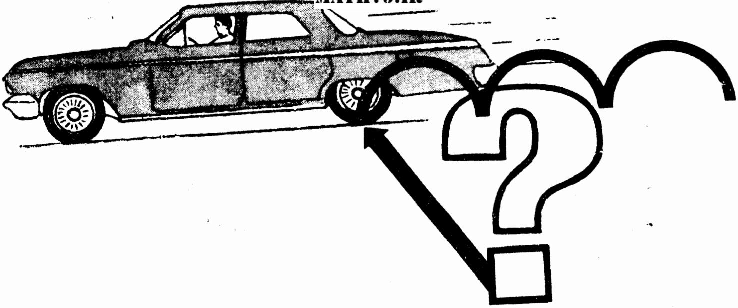
این دستگاه، براساس قاعدهٔ رادار بـه‌کار می‌رود ودو ایستگاه ـ که درخشکی قرار دارند ـ کانونهای‌این‌هذلولی‌هستند. یکی ازایستگاهها، علامتهایی می‌فرستد وایستگاه دیگر آنها را فوراً دریافت می‌کند، زیرا فاصلهٔ بین‌دو ایستگاه، درمقایسه با سرعت سیرموجهای رادیوئی، بسیار کوتاه است.

به‌محض اینکه ایستگاه دوم، علامتهای ایستگاه اول را دریافت کند، به‌طور خودکارآنها را مخابره می‌کند. دریانوردی‌که دریك‌کشتی باتجهیزات لوران باشد، هر دوعلامت را دریـافت می‌کند و تفاوت بین زمانهای رسیدن دوعلامت به‌کشتی، روی یك پرده ثبت می‌شود. دستگاه دریافت‌کننده، به‌طور خودکار، سرعت سیر نـور را (که موجها با آن سرعت حرکت‌کرده‌اند) به مسافتهای عادی تبدیل می‌کند. این محاسبه، مشخص می‌کند که موقعیت‌کشتی درروی فلان‌هذلولی است. این‌هذلولی در روی نقشه، نقطه‌گذاری مـی‌شود. وقتی کـه علامتهای دیگری از دو



شکل ۶۲

دستگاه دریافت شود، هذلولی دیگری رسم می‌شود. محل برخورد این دوهذلولی، موقعیت کشتی را نشان می‌دهد. البته دوهذلولی ممکن است درچهار نقطه یکدیگر را قطع کنند، ولی دریانوردباروش خاصی، می‌تواند نقطه‌ای را که محل واقعی کشتی است، مشخص کند (مثل نقطهٔ S در شکل ۶۲).

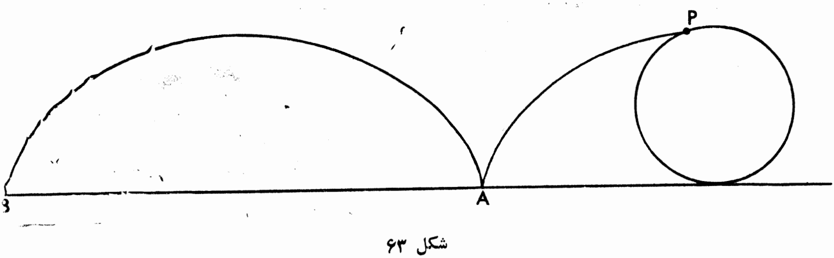


۶. منحنیهای چرخنده

سیکلوئید (Cycloïd)

وقتی که یك اتومبیل باسرعت ۶۰ میل درساعت حرکت می‌کند، چه‌قسمتی از آن بیحرکت وساکن باقی‌می‌ماند؟

پاسخ به این پرسش، بستگی‌به خاصیتهٔ یك منحنی دارد که سیکلوئید نامیده می‌شود.



شکل ۶۳

نقطه‌ای مانند P روی محیط دایره‌ای نشان کنید. مسیر این‌نقطه را، وقتی که دایره روی خط‌راستی بدون لغزش چرخ بزند، رسم کنید.

این مسیر، همان سیکلوئید است (شکل ۶۳).

وقتی که نقطهٔ P درمسیر خود به‌نقطهٔ A واقع برخط راست برسد، لحظه‌ای پیش می‌آیدکه نقطهٔ P ساکن می‌ماند. بنابراین، هر نقطه‌ای که روی لاستیك اتومبیل انتخاب شود، لحظه‌ای فرامی‌رسدکه این نقطه بیحرکت می‌ماند و آن، لحظه‌ای است که این نقطه باجاده برخورد می‌کند.

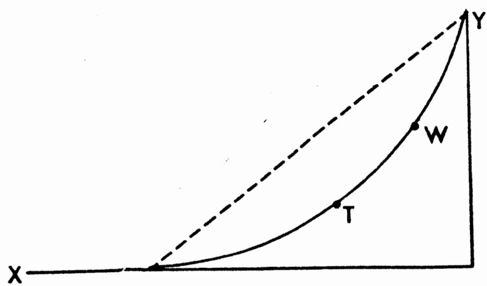
به‌این‌ترتیب، سیکلوئیدعبارتست‌ازمنحنی نقطه‌ای ازمحیط‌دایره، وقتی که‌این دایره، روی‌یك خط‌راست می‌غلطد. معادلهٔ قطبی این‌منحنی چنین است:

$$x=a(\theta-\sin\theta)\ ,\ y=a(1-\cos\theta)$$

که درآن، a شعاع دایره و θ ،زاویهٔ دوران برحسب رادیان است.

منحنی سیکلوئید خاصیتهای جالبی‌دارد. مثلاً ، طول یك کمان‌از سیکلوئید (از B تا A درشکل ۶۳)، درست چهاربرابر قطر دایرهٔغلطنده است، همچنین مساحت بین این کمان وخط راست، سه‌برابر مساحت‌دایره است.

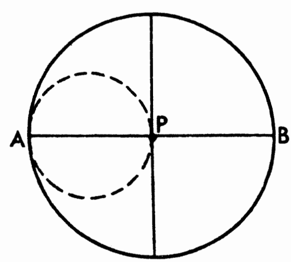
اگر شیبی به‌شکل سیکلوئید داشته باشیم (شکل ۶۴) وگلوله‌ای را روی این‌شیب رها کنیم، خواهیم دیدکه زمان‌لازم برای رسیدن‌گلوله به‌محور x، مقدار ثابتی است، یعنی این زمان، برای موارد مختلفی که گلوله را از T یا W یا y رها می‌کنیم، تفاوتی ندارد. به‌همین‌مناسبت، به سیکلوئید « منحنی با فرود یکسان » هم مـی‌گویند. همچنین، منحنی سیکلوئید، تندترین فرودهای را دارد، یعنی اگرهمان‌گلوله را درامتداد خط راست رها کنیم تا از y به محور x بـرسد، سرعت کمتری خواهد



شکل ۶۴

داشت.

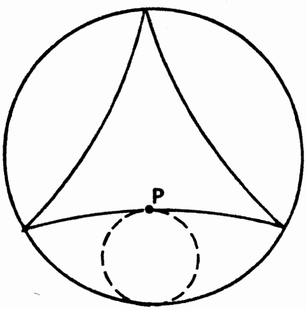
وقتی که یك دایره روی یك خط راست می‌غلطد، هرنقطهٔ محیط آن، یك سیکلوئیدرسم می‌کند. حالاببینیم، وقتی که یك دایره، روی یك دایره بغلطد، چه اتفاقی می‌افتد؟ اگر قطر دایرهٔ کوچکتر، نصف قطر دایرهٔ بزرگتر باشد ودر داخل دایرهٔ بزرگتر روی محیط آن بغلطد (شکل ۶۵)، نقطهٔ A، خط راست AB را ـ که قطر دایرهٔ بزرگتر است ـ طی خواهد کرد.



شکل ۶۵

اگر قطر دایرهٔ کوچکتر، کمتر ازنصف قطر دایرهٔ بزرگترباشد، هر نقطهٔ محیط آن (وقتی که دایرهٔ کوچکتر در درون دایرهٔ بزرگتر و روی

محیط آن بغلطد)، نوعی منحنی رسم می‌کند که هیپوسیکلوئید (hypocycloid) نامیده می‌شود. درچنین حرکتی، اگر نسبت قطرهای دودایره عددی گویا باشد، هرنقطهٔ مانند P، سرآخر، به‌جای اولیهٔ خودش می‌رسد. درشکل ۶۶، نسبت دوقطر را برابر ۳ گرفته‌ایم وهمانطور که می‌بینید، این خود راهی است برای اینکه بتوانیم دایره را به‌کمانهای برابر تقسیم کنیم و درنتیجه‌چند ضلعی منتظمی (با هرتعداد ضلع که بخواهیم) رسم کنیم.



شکل ۶۶

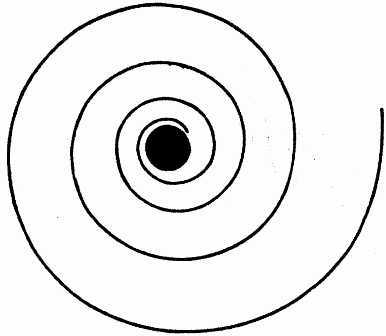
منحنی زمان - پیچ

همه‌جا، دردوروبرما، منحنی‌پیچ‌مانند دیده‌می‌شود. این‌منحنیها، درهوا می‌چرخند ودر دریامی‌پیچند، درتنهٔ‌درختان وبدن‌جانوران به‌چشم

می‌خورند. درماشینهای اجتماع نوین‌امروزی هم، به‌فراوانی به منحنی پیچ‌مانند بر می‌خوریم. گردبادها، گردابها و کهکشانهای پرپیچ وتاب فضای نامتناهی، ضمن حرکت خود، نمونه‌هایی ازمنحنی پیچ مانند را برای ما می‌سازند. حرکت موجها دردریا، حرکت تندبازشکاری در فضا، نقش‌گل آفتاب‌گردان‌وشاخ بزکوهی، صحنه‌هایی ازنمایش منحنی‌مارپیچ است. همانگونه که‌پیچهای صدف‌حلزون، نمایندهٔ سالهای‌عمر این‌جانور است، فنر مارپیچی ساعت‌هم، ضمن حرکت‌خود، حساب‌زمان رابرای ما نگه می‌دارد. گاهی‌هم، همین فنرهای مارپیچی، وقتی زیرپوشش مبل یا تختخواب قرارگرفته باشند، وسیله‌ای برای راحتی وآسایش ما هستند. وبالاخره همین‌منحنیهای مارپیچی،به‌ریاضیدانان کمك‌می‌کنندتا ازعهدهٔ حل بسیاری ازمساله‌ها برآیند.

به‌سادگی می‌توان یکنوع پیچ را، به‌کمك مداد ویك‌تکه نخ‌رسم کرد. یك‌چیزگرد،ومثلایك‌قرقره‌را روی‌یك‌صفحهٔ‌مقوائی‌قراردهید. نخ را ازیك سرآن محکم‌دورقرقره بپیچید ودر سردیگر نخ حلقه‌ای قراردهید. وقتی که تمام نخ‌دور قرقره‌پیچیده شد، مدادی داخل‌حلقه‌کنید ونوك‌آنرا طوری روی‌مقوا (ودر خلاف جهتی‌که نخ را پیچیده‌اید) بکشیدکه نخ‌به تدریج ازقرقره بازشود. در هرحال، قرقره را بادست محکم بگیریدکه‌نخ بافشار بازشود وبه‌صورت‌کشیده باشد. منحنی که به این صورت، روی مقوا رسم‌می‌شود، یك‌پیچ است. به‌همین ترتیب می‌توان‌روی تخته‌کلاس هم عمل‌کرد. یك‌تکه چوب یاتکهٔ لاستیکی را روی‌تخته‌سیاه بچسبانید و نخ را دورآن بپیچید، سپس باگچی‌که به‌سردیگر نخ بسته‌اید، درخلاف

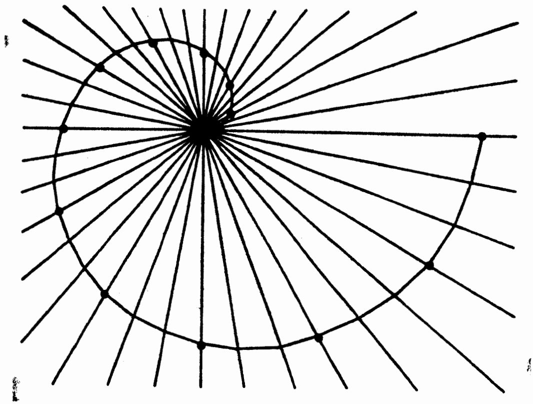
جهت پیچ نخ، روی تخته‌بکشید. روی تخته کلاس یك‌منحنی پیچ مانند رسم می‌شود.



شکل ۶۷

طریق دیگری از رسم‌منحنی مارپیچی چنین‌است: ازیك نقطه، و به‌کمك نقاله، شعاعهائی رسم‌کنید، به نحوی‌که زاویهٔ بین هر دو شعاع متوالی برابر ۱۰ درجه‌باشد. ازمرکز آغاز کنید وروی یکی از شعاعها، مثلاً به‌فاصلهٔ یك‌میلیمتر، روی شعاع دوم به‌فاصلهٔ ۲ میلیمتر، روی شعاع‌سوم به‌فاصلهٔ۳میلیمتر علامت بگذارید وبه‌همین ترتیب ادامه‌دهید. ازوصل نقطه‌هایی‌که به‌این ترتیب بدست‌می‌آید، به‌یکدیگر، یك منحنی مارپیچی پیدامی‌شود. باتغییر زاویهٔ بین‌شعاعهاو فاصلهٔ تامرکز،می‌توان مارپیچهای‌گوناگونی رسم‌کرد. انتهای این مارپیچ کجاست؟

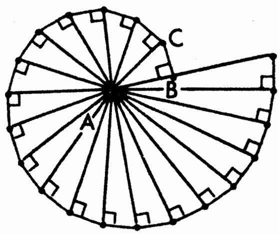
روش دیگر رسم مارپیچ، استفاده از زاویه‌های قائمه‌است: برای این‌منظور، مثلاً ازپاره‌خط دلخواه AB آغاز می‌کنیم. درنقطهٔ B،خطی



شکل ۶۸

عمود برAB رسم وروی آن نقطهٔ C را به‌فاصلهٔ BC برابر با۵میلیمتر جدا می‌کنیم. بعد AC را رسم واز نقطهٔ C عمودی برآن رسم می‌کنیم ودوباره روی این‌عمود نقطهٔ D را بـه فاصلهٔ CD برابر ۵ میلیمتر جدا می‌کنیم. اگر به‌همین‌ترتیب ادامه‌دهیم،یك‌شکل مارپیچی‌به‌دست‌می‌آید. اگر بایك مقوا، زاویهٔ قائمه‌ای بسازیم‌که یك ضلع آن برابر ۵ میلیمتر باشد، علامتگذاریهایی کـه برای رسم شکل لازم است، ساده‌تر می‌شود. توجه‌کنید! اگرطول AB را هم برابر ۵ میلیمتر واین ۵ میلیمتررا واحد اندازه‌گیری به‌حساب می‌آوردیم، طول وترهای زاویه‌های قائمه، ریشهٔ دوم‌عددهای‌درست متوالی‌را به‌مامی‌داد ($AC=\sqrt{۲}$ ، $AD=\sqrt{۳}$،...).

تعریف ریاضی یکی ازاین نـوع منحنیها، کـه به پیچ ارشمیدس

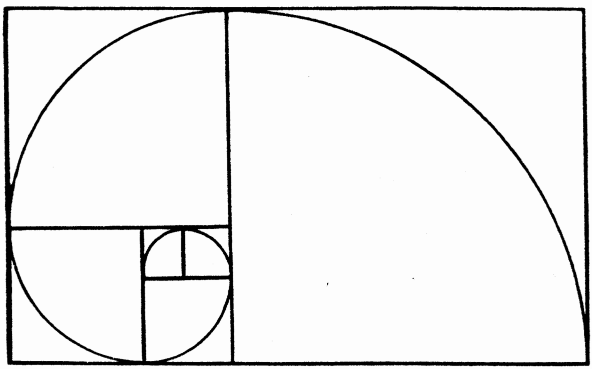


شکل ۶۹

معروف شده، چنین است: پیچ ارشمیدس عبارتست از مسیر نقطه‌ای‌که باحرکت متشابه روی‌یك خطراست حرکت‌کند، درحالیکه خطراست‌هم، دور یکی‌ازنقطه‌های خود؛ حرکت دورانی‌متشابه داشته باشد. این‌تعریف را می‌توان با حرکت حشره‌ای روی یکی از پره‌های چرخی که درحال گردش است، مجسم‌کرد، به‌شرطی‌که حشره ازمرکز چرخ به‌طرف محیط آن حرکت‌کند. اگر یك‌صفحهٔ مقوایی روی یك‌دستگاه‌گرامافون بچرخد ودر همان حال وبامداد، خطی از مرکز به‌طرف محیط رسم‌کنیم، تقریباً یك پیچ رسم می‌شود. اثرصدا روی‌صفحهٔ‌گرامافون هم، به صورت یك منحنی مارپیچی است.

روانشناسان به‌تجربه دریافته‌اند که مناسبترین اندازه‌ها برای مستطیل در چشم انسان، وقتی است‌که نسبت بعدهای آن برابر ۰/۶۱۸ به۱ باشد وبه‌همین مناسبت، طراحان و هنرمندان، اغلب این نسبت را رعایت می‌کنند. این‌نوع مستطیل، از یونان باستان، به مستطیل طلائی معروف شده است. این مستطیل، علاوه برآنکه درچشم آدمی زیباست، دارای خاصیتهایی هم می‌باشد. اگر ازاین مستطیل، یك مربع‌کامل جدا کنیم، بازهم یك‌مستطیل باهمان نسبت باقی‌می‌ماند و هرچه این عمل‌را

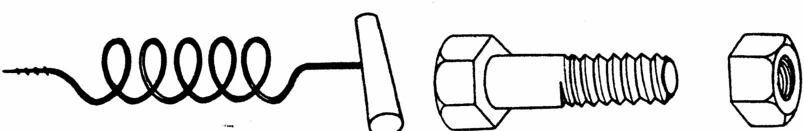
تکرار کنیم، بازهم مستطیل باقیمانده، یك‌مستطیل طلائی است. جالب‌تر ازهمه اینست‌که اگر ازنخستین مربع داخلی آغـاز کنیم ودر داخل هر مربع ربع‌دایره‌ای رسم‌کنیم وبه‌طرف خارج برویم، یك مارپیچ‌لگاریتمی به‌دست می‌آید (شکل ۷۰).

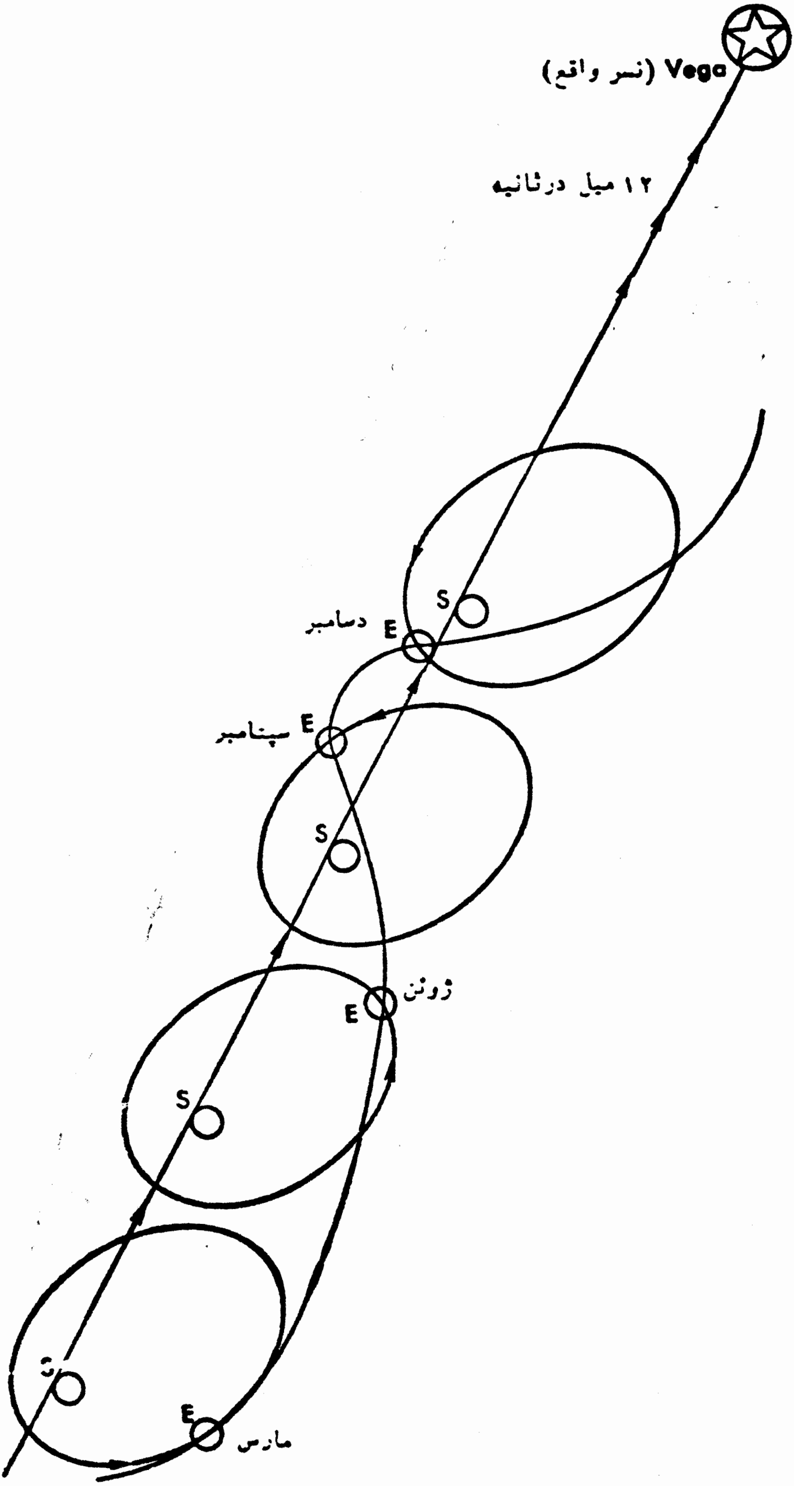


شکل ۷۵

این پدیده، بـانام لئونارد وفیبوناچی اهل پیزا، کـه در سال ۱۲۲۰ رشتهٔ عددی عجیبی راکشف کرد، بستگی دارد. دوعدد اول این رشته، برابر است با ۱ وازآن به‌بعد (ازعدد سوم به‌بعد)، هرعدد برابراست با مجموع دوعدد قبلی خود:

۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ۳۴، ۵۵، ۸۹، ۱۴۴، ...




Vega (نسر واقع)
۱۲ میل درثانیه
S
E
دسامبر
E
سپتامبر
S
ژوئن
E
S
E
مارس

شکل ۷۱

منحنی حلزونی (Helix).

یك صفحهٔ مستطیلی شکل از کاغذ خطدار انتخاب وقطر آنرا رسم کنید. سپس بااین کاغذ، استوانه‌ای درست کنید، به‌نحوی که خطهای کاغذ به‌طور قائم قرارگیرد. خطی که درامتداد قطر رسم‌شده بود، دراینحالت هم با خطهای قائم، زاویه‌های مساوی می‌سازد وضمناً یك‌منحنی‌تشکیل می‌دهدکه به‌منحنی حلزونی معروف است. معمولاً، وقتی که دوسنجاب، درامتداد تنهٔ درخت یکدیگر را دنبال می‌کنند، مسیری راطی‌می‌کنندکه شبیه منحنی حلزونی است. اگرنقطه‌ای روی تنهٔ‌درخت و دربالای آن، ونقطه‌ای دیگر درست نقطهٔ مقابل آن در پایین درخت انتخاب کنیم، کوتاهترین‌فاصلهٔ بین‌آنها، روی مسیر منحنی حلزونی است. وآیاشگفت آور نیست‌که سنجاب ازاین خاصیت آگاه است؟

خط دنده‌های یك‌پیچ، نمایش یك منحنی حلزونی است. مثلاً، وقتی‌که نجار یك‌چوب راسوراخ می‌کند، متهٔ اودرمسیر منحنی‌حلزونی حرکت‌می‌کند. همینطور، وقتی‌که ملخ‌قایق‌موتوری‌یاهیلکوپتر می‌چرخد، یك منحنی حلزونی رسم می‌کند.

برگهای شاخهٔ درخت نارون، شاخه‌های درخت بلوط ولبه‌های برجستهٔ میوهٔ‌کاج، همه به‌شکل منحنی حلزونی قرارگرفته‌اند. در شاخهٔ نارون، هر برگ به‌فاصلهٔ نیم‌دور نسبت به‌برگ بالاتر یا پایین‌تر قرار گرفته است. این رابطه را باکسر $\frac{1}{2}$ نشان می‌دهیم. این‌کسر نشان‌می‌دهد که وقتی منحنی حلزونی یك‌دورکامل بزند، از دوبند برگ شاخه عبور می‌کند. در درخت آلش، این‌نسبت برابر $\frac{1}{3}$ است، یعنی در این‌گیاه هربرگی درثلث محیط نسبت به برگ بلافاصله قبل یابعد ازخودش قرار

دارد. این نسبت در درخت بلوط برابر $\frac{۲}{۵}$ ودر درخت‌راج برابر $\frac{۳}{۸}$ است. کسرهای دیگری مثل $\frac{۵}{۱۲}$، $\frac{۸}{۲۱}$، $\frac{۱۳}{۳۴}$ و $\frac{۲۱}{۵۵}$، ترتیب قرار گرفتن برگها را در اقسام گل سرخ، میوهٔ کاج وسایر گلها نشان می‌دهد.

بین این کسرها، چه رابطه‌ای وجود دارد؟

$$\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۵},\frac{۳}{۸},\frac{۵}{۱۳},\frac{۸}{۲۱},\frac{۱۳}{۳۴},\frac{۲۱}{۵۵}$$

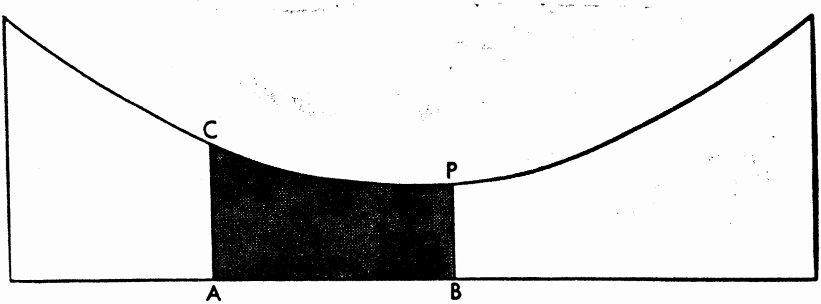
اگر صورتها ومخرجها را مقایسه کنیم، بستگی بین آنها را پیدا می‌کنیم. اگر ازدو کسر اول بگذریم، ازکسر سوم به‌بعد، صورت هرکسر برابر بامجموع صورتهای دوکسرقبل ازخودش ومخرج آن‌برابربامجموع مخرجهای دوکسرقبل‌ازخودش‌می‌باشد. وآیا شگفت‌آور نیست که‌طبیعت چنین دستور ریاضی را سرمشق کارخود قرارداده باشد؟

منحنی زنجیری

اگر زنحیری را بین دوپایه، وبه‌صورت معلق وآزاد نگاه‌داریم، شکلی به‌دست می‌آیدکه منحنی زنجیری نامیده می‌شود. این‌شکل درظاهر شبیه کمانی ازدایره است، ولی درواقع اینطورنیست. ممکن است گمان رود که‌شبیه سهمی است، ولی درواقــع سهمی هـم‌نیست. این، منحنی جدیدی است که شکل‌دیگری، خاصیتهای دیگری و معادلهٔ دیگری دارد. می‌دانیم که معادلهٔ سهمی عبارتست از $y=x^۲$، در حالیکه، معادلهٔ این منحنی چنین است:

$$y=\frac{۱}{۲}(e^{x}+e^{-x})$$

منحنی زنجیری، یك مقطع مخروطی نیست وبا برش یك‌مخروط، نمی‌توان آنرا بـه دست آورد. ساده‌تـرین منحنی زنجیری بـا معادلهٔ $y=\frac{۱}{۲}(e^x+e^{-x})$ ، خاصیتهای‌عجیبی‌دارد. دراین‌منحنی، همیشه‌عددی که اندازهٔ طول یك‌قطعه‌ازآنرابه‌ما می‌دهد، برابر است باعددی که‌معرف اندازهٔ مساحت زیراین قطعه است. در شکل ۷۲، طول منحنی زنجیری، از C تا P، برحسب سانتیمتر، برابر است با عدد مساحت قسمت‌هاشور خورده برحسب سانتیمتر مربع.

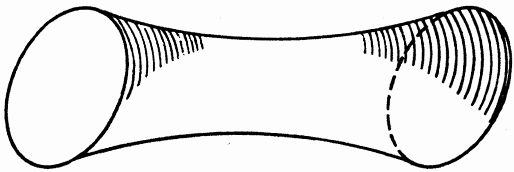


شکل ۷۲

خط زنجیری درسه‌بعدهم‌به‌وجودمی‌آید. اگر یك‌حباب‌کف‌صابون بین دوحلقهٔ مدور سیمی تشکیل شود، سطح شکل حاصل، کمترین سطحی است‌که بین دوحلقه درست می‌شود. آیا شگفت‌آور نیست‌که این سطح، مانند سطح‌استوانه مدورنیست، بلکه‌انحنای آن، به‌شکل منحنی‌زنجیری است؟

تمرینهای ۵. سطحهای منحنی

۱. نمودار جدول زیر را رسم کنید:



شکل ۷۳

x	۰	۱	۱	−۱/۲	−۲	−۳	−۲	۱/۲	۳	۵
y	۰	۱	۲ ۱/۲	۳	۲	۰	−۲	−۳ ۱/۲	−۲	۱

۲. مجموعه‌ای از آنچه که درمعماری، درطبیعت‌ودر ماشین‌آلات، به‌شکل مارپیچ، منحنی حلزونی، سیکلوئید و منحنی‌زنجیری پیدا می‌کنید، جمع‌آوری کنید.

۳. نمونه‌هایی ازمستطیل طلائی را درهنر، معماری یاطبیعت پیدا کنید.

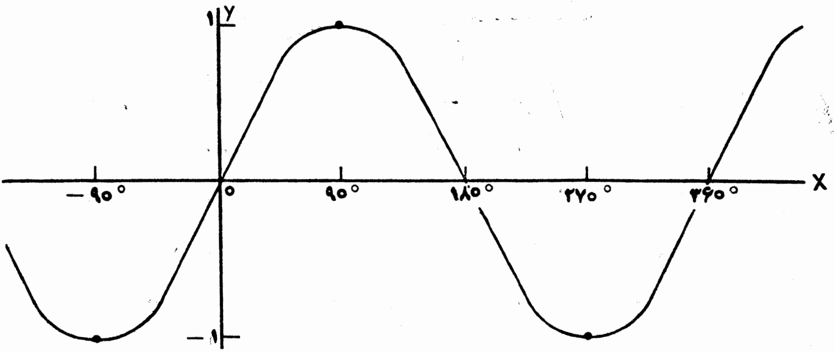
۴. مجموعه‌ای ازگیاهانی‌که طرز قرار گرفتن برگهای آنها، به صورت حلزونی‌و به‌نسبت عددهای‌فیبوناچی است، پیداکنید.

۵. روی یک‌کاغذ شطرنجی، منحنی مارپیچی زیر را درست‌کنید:
مبدأ O رادروسط‌کاغذ قراردهید. نقطهٔ A رابه‌فاصلهٔ مثلاً ۱سانتیمتر ازمبدأ نشان‌کنید. ازنقطهٔ A، عمودی برOA به‌طول ۱سانتیمتررسم کنید. انتهای این عمود را B بنامید. OB را رسم کنید. طول OB را اندازه بگیرید. این طول برابر است با √۲. از B عمودی به‌طول۱ سانتیمتر بر OB رسم‌کنید و انتهای آنرا C بنامید. OC را اندازه بگیرید. طول‌آن‌برابر√۳ می‌شود. اینکاررا ادامه‌دهید تامنحنی‌مارپیچی شما، ریشهٔ همهٔ عددهای‌کوچکتر از۲۰ را بدهد.

منحنی موسیقی ـ حرکت سینوسی

موجهای اقیانوس که به‌دنبال‌هم به‌طرف ساحل می‌غلطند، نمایشی ازیك حرکت موجی‌هستند. این‌حرکت موجی، همچنین نشانه‌ای است‌از اینکه چطور صداها، ومثلاً آهنگ‌موسیقی، درهوا سیر می‌کند. موجهای رادیوئی هم، به‌همین شکل، برنامه‌های رادیو و تلویـزیون را ازدستگاه فرستنده، به‌خانهٔ شما می‌رسانند.

یکی ازبهترین‌بیانهای‌ریاضی، برای‌حرکت‌موجی، منحنی‌سینوسی است‌که معادلهٔ جبری آن عبارتست از $y = sin x$، کـه درآن x نمایندهٔ اندازهٔ زاویه وy نمایندهٔ فاصله است. نمودار این منحنی، در شکل ۷۴ نشان داده شده است.

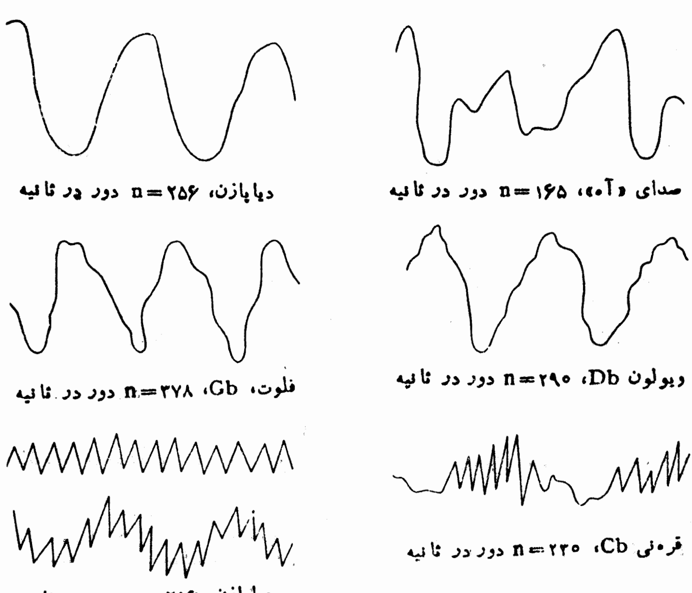


شکل ۷۴

توجه داشته باشیدکه این منحنی بعد از۳۶۰ درجه، دوباره عیناً تکرار می‌شود. به‌چنین منحنیهایی که پس از فاصلهٔ معینی عیناً تکرار می‌شوند، منحنیهای دوره‌ای یامتناوب گویند. برای اینکه نشان دهیم،

چطور موجهای صوتی شبیه منحنی سینوسی هستند، یك‌مداد به انتهای یك دیاپازون بزرگ می‌بندیم. شاخهٔ دیاپازون را محکم می‌کشیم ورها می‌کنیم. اگر در چنین حالتی، مداد بتواند روی کاغذی حرکت کند، خواهیم دیدکه نوعی منحنی روی کاغذ رسم می‌کندکه خیلی به منحنی سینوسی شباهت دارد. هرچه صدای‌دیاپازون بیشتر باشد، منحنی‌مذکور ارتفاع (amplitude) بیشتری پیدا می‌کند. هرچه شاخهٔ دیاپازون کوتاهتر وضربه محکمتر باشد، لرزش سریعتر ودر نتیجه، دورهٔ تناوب یعنی طول موج، کوتاهتر می‌شود.

منحنیهای بسامد (فرکانس) در پرده‌های مختلف



صدای «آ»، ۱۶۵=n دور در ثانیه

دیاپازن، ۲۵۶=n دور در ثانیه

ویولون Db، ۲۹۰=n دور در ثانیه

فلوت، Gb، ۳۷۸=n دور در ثانیه

قرەنی Cb، ۲۳۰=n دور در ثانیه

دیاپازن، ۲۵۶=n دور در ثانیه ٠
صوت سوتك، ۲۰۰۰=n دور در ثانیه

شکل ۷۵

برق متناوبی که درخانهٔ شماست، حرکتها وتغییراتی شبیه همین منحنی سینوسی دارد. البته نوسان برق ۶۰ مرتبه درثانیه است و بااین سرعت نمی‌توان وجود نوسان را احساس کرد.

موسیقی راکه ازیك دستگاه گرامافون شنیده می‌شود، نمی‌توان با یك منحنی سادهٔ سینوسی تصویر کرد. زیرا، این موسیقی، ترکیبی از آهنگها وسازهای مختلف است و طوری به هم ترکیب شده‌اند که برای گوش، ملایم ومطبوع باشد. با وجود این، آواهایی را که می‌شنوید، می‌توان به‌صورت ترکیبی ازمنحنیهای سینوسی نمایش داد. بسیاری‌از خاصیتهای صوتی موسیقی را می‌توان ازروی شکل منحنی آنهاتشخیص داد. به‌این ترتیب، می‌توان از ریاضیات، برای تجزیهٔ صوتهای موسیقی وتعیین میزان درستی ضبط آنها، استفاده کرد.

تمرینهای ۶. حرکت سینوسی

۱. با استفاده ازجدول تابعهای مثلثاتی، منحنیهای زیر را رسم کنید:

الف) $y=\sin x$، ب) $y=\cos x$، ج) $y=tg x$.

۲. با استفاده ازجدول تابعهای مثلثاتی، منحنیهای زیر را رسم کنید.

الف) $y=\sin ۲x$، ب) $y=\frac{۱}{۲}\sin x$، ج) $y=۲\sin x$.

۳. نموداری راکه از جدول زیر به‌دست می‌آید، درمختصات قطبی رسم کنید. معادلهٔ‌این‌منحنی درمختصات‌قطبی‌چنین است $\rho=۱-۲\cos\theta$

θ	۰	۳۰°	۶۰	۷۵	۹۰°	۱۲۰°	۱۵۰	۱۸۰	۲۱۰°	۲۴۰°	۲۷۰°	۳۰۰°	۳۳۰°	۳۶۰°
ρ	−۱	−۰/۷۳	۰	۰/۵	۱	۲	۲/۷۳	۳	۲/۷۳	۲	۱	۰	−۰/۷۳	−۱

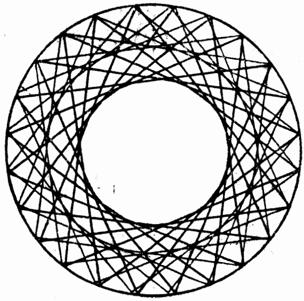
۷. منحنی دوخت ودوز

اگر لفاف یا پوشش منحنیهارا بانخهای رنگین ببافند،نمونه‌های بسیارجالبی به‌دست می‌آید. این لفافها ممکن است دایره، سهمی،بیضی یا هذلولی باشد. بعضی ازاین شکلها را درخانه‌ها، حتی برای کاغذهای دیواری به‌کار می‌برند.

برای‌کار ما، یك‌ورقهٔ نازك‌مقوا، یك سوزن بافندگی یا رفوگری ومقداری نخ تابیده بارنگهای مختلف لازم است. بنای‌کار عبارتست از رسم دایره وخطراست؛ ضمناً ازپرگار، برای‌اندازه‌گیری‌فاصله‌های‌مساوی هم، استفاده می‌کنیم.

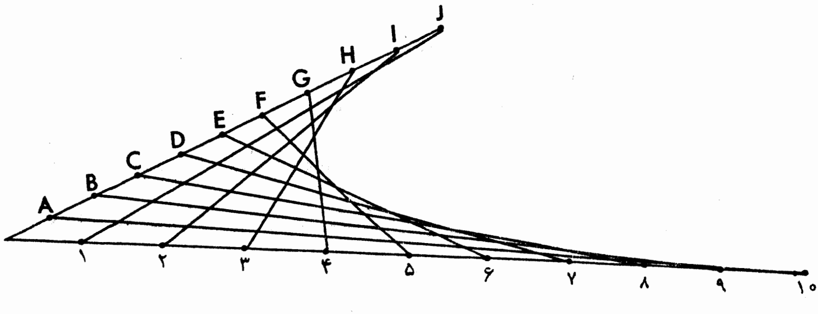
۱. دایره . یك‌دایرهٔ بزرگ روی مقوا رسم‌کنید، محیط آنرا به ۲۴ قسمت مساوی تقسیم نمایید. ۲۴ رشته نخ‌مساوی وهمرنگ انتخاب کنید. بایکی از نخها دونقطه از تقسیم را به‌هم وصل‌کنید، سپس با نخ دوم، دو نقطهٔ مجاور دو نقطهٔ قبلی را وهمینطور تاآخر. بعد با نخهای کوتاهتر، ولی به‌یك‌اندازه وبا رنگ دیگر همین‌کار را انجام‌دهیدوسعی کنیدکه به‌این ترتیب، مثلا تا شش رنگ مختلف را به‌کار ببرند. چون هربار، ۲۴ قطعه‌نخ‌به‌یك‌اندازه‌اند، وترهای مساوی‌دردایره پدیدمی‌آورند که درنتیجه ازمرکز دایره به‌یك فاصله‌اند وبنابراین از برخورد هرسری

ازاین نخها، دایره‌ای پیدامی‌شود (واگراز ۶رنگ نخ‌استفاده کرده‌باشید، شش دایره‌هم مرکز به‌دست می‌آید).



شکل ۷۶

۲. سهمی. برای اینکه یك شکل سهمی ببافیم،روی ورقهٔ‌مقوایی، زاویهٔ دلخواهی رسم وروی هرکدام ازضلعهای‌آن قسمتهای مساوی‌جدا می‌کنیم. لزومی‌ندارد که پاره‌خطهای هرضلع، با پاره‌خطهای ضلع دیگر، برابرباشد، ولی، تعدادتقسیمهای دوضلع بایدبرابر باشد. نقطه‌های‌تقسیم



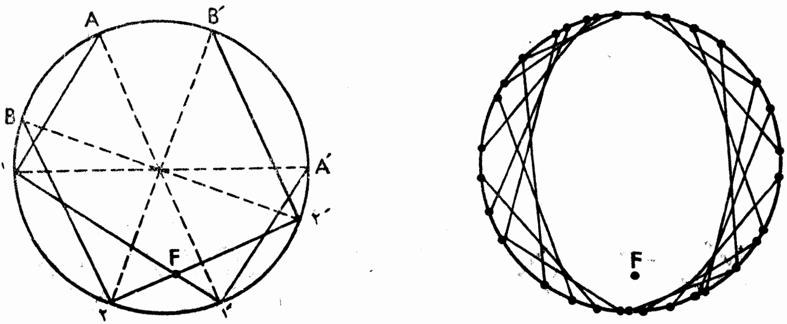
شکل ۷۷

را، شبیه شکل ۷۷، شماره‌گذاری مـی‌کنیم. بعد از نقطهٔ j آخرین نقطهٔ تقسیم یك‌ضلع ـ به‌نقطهٔ ۱ـ نخستین نقطهٔ تقسیم ضلع دیگر ـ نخی‌وصل

می‌کنیم وسپس، I را به ۲، H را به ۳ و همینطور هردونقطهٔ نظیر را به هم بانخ وصل می‌کنیم. درنتیجه یک‌شکل سهمی ـ و یا بهتر بگوییم، لفاف سهمی ، به‌دست می‌آید.

اگر این روش را برای‌زاویه‌های مختلف، وهمچنین زاویهٔ‌قائمه، به‌کار ببریم، شکلهای جالب وزیبایی به‌دست می‌آید.

۳. بیضی. برای بافتن بیضی، باید نقطه‌های زیادی ازدایره را به هم وصل کرد (آنطورکه درشکل ۷۸ دیده می‌شود).

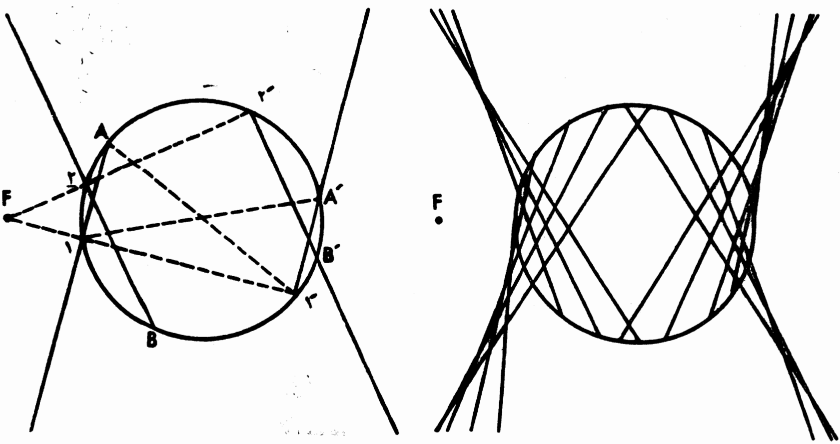


شکل ۷۸

دایره‌ای دلخواه روی مقوا رسم ونقطهٔ F را دردرون آن، غیراز مرکز، انتخاب‌کنید. ازF خطی رسم‌کنید تا دایره‌را در دونقطهٔ ۱ و ′۱ قطع‌کند.ازنقطه‌های ۱ و′۱، قطرهای ′A۱ و A′۱ را رسم‌کنید. دوباره، ازهمان نقطهٔ F وتـر دیگری مثل ′۲۲ وسپس قطرهـای ′B۲ و B′۲ را بکشید واین عمل را بارها وبارها تکرارکنید. بعد از۱ بهA، ′۱ به′A، ۲ بهB، ′۲ به′B وغیره وصل‌کنید. شکلی که‌به‌این‌ترتیب به‌دست‌می‌آید، بیضی است که یکی از کانونهای آن نقطهٔ F است. کانون دوم بیضی، قرینهٔ F نسبت به O ـــ مرکز دایره است، وروشن استکـه هرچه F از

مرکز دورتر باشد، بیضی درازتر می‌شود.

۴. هذلولی. برای بافتن هذلـولی، یک‌دایره روی مقوا بکشید و نقطهٔ F را در هر کجا که مایلید، در خارج دایره، نشان کنید. از F، خطی رسم کنید تا دایره را در نقطه‌های ۱ و ′۱ قطع کند و قطرهای ′۱A و ′A۱ را رسم کنید. به‌همین‌ترتیب نقطه‌های B و ′B و نقطه‌های دیگری نظیر آنها را پیدا کنید. سپس ۱ را به A، ′۱ را به ′A، ۲ را به B، ′۲ را به ′B و غیره وصل کنید (شکل ۷۹) وادامه دهید تا از دو طرف دایره بیرون روند. شکلی که به‌این ترتیب به‌دست می‌آید، یک‌هذلولی است که F یکی از کانونهای آنست. کانون دیگر هذلولی، قرینهٔ F نسبت به‌مرکز دایره است.



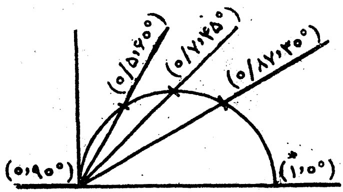
شکل ۷۹

جواب وحل تمرینها

تمرینهای ۱

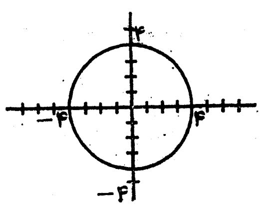
۱. الف) ۱۰ ب) ۱۳ ۲. ۱۳ ۳. $\sqrt{۸۶}$

۴.

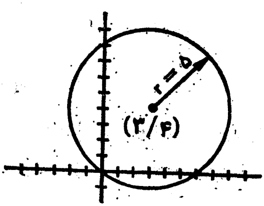


تمرینهای ۲

۱. الف)

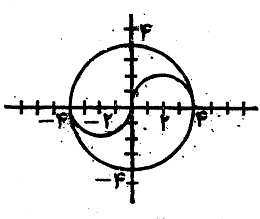


ب)



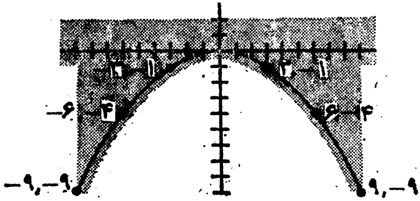
۵. ۴۰ سانتیمتر ۶. یك دور کامل

۷.



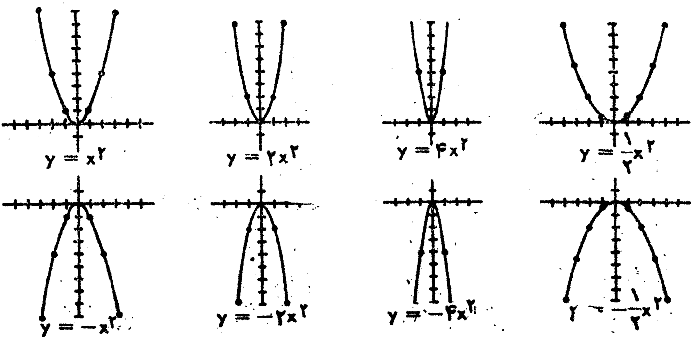
تمرینهای ۳

۲.



۳. $\frac{۵}{۸}$ ثانیه و یك ثانیه

۴.



در سهمی (چه حالتی‌که روبه‌بالاست وچه حالتی‌که روبه‌پایین است) هرچه قدرمطلق ضریب $x^۲$ کوچکتر باشد، شاخه‌های سهمی از هم بازتر می‌شود. اگر ضریب $x^۲$، عددی مثبت باشد، دهانه‌اش به طرف بالااست و اگر ضریب $x^۲$، عددی منفی باشد، دهانه‌اش به‌طرف پایین است.

تمرینهای ۴

۱. الف) طول قطربزرگتر $= ۸$، طول قطرکوچکتر $= ۶$؛ مختصات کانونها: $(\sqrt{۷}, ۰)$ و $(-\sqrt{۷}, ۰)$.

ب) قطر بزرگتر $= ۱۲$، قطر کوچکتر $= ۱۰$؛ مختصات کانونها: $(۰, \sqrt{۱۱})$ و $(۰, -\sqrt{۱۱})$.

ج) قطر بزرگتر $= ۴$، قطرکوچکتر $= ۲$؛ مختصات کانونها: $(۰, \sqrt{۳})$ و $(۰, -\sqrt{۳})$

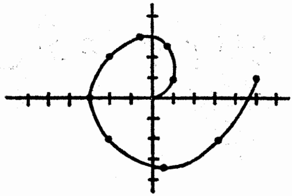
د) قطر بزرگتر $= ۱۴$، قطرکوچکتر $= ۱۴$، مرکز: $(۰, ۰)$.

۲. تقریباً ۱۶۰۰۰۰۰ میل.

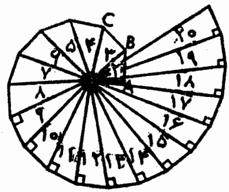
۵. بیضوی سطحی است که ازدوران یك بیضی دوقطرش به‌دست می‌آید.

تمرینهای ۵.

۱.

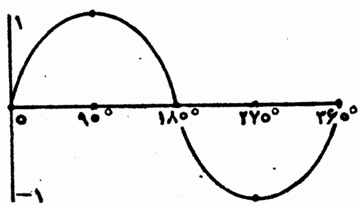


۵.

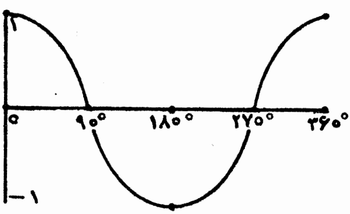


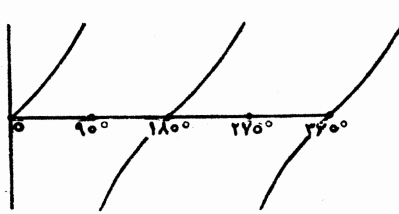
تمرینهای ۶

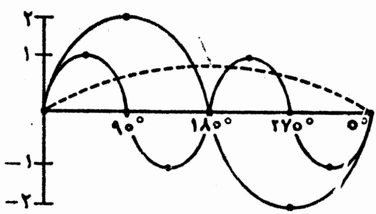
۱. الف)



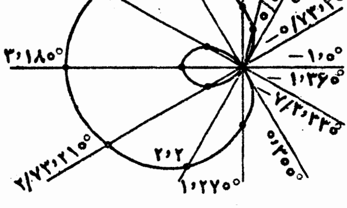
ب)







۵.



کتابهائی از مترجم این کتاب

۱۵۰ ریال

شماره ثبت کتابخانه ملی
۱۳۵۹
۳۶/۸/۱۵

طرح روی جلد از ابراهیم حقیقی

شاهرضا، خیابان ابوریحان، چهارراه مشتاق